Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Составитель А. П. Крачковский

Учебно-методическое пособие
для специальности 1-26 02 05 «Логистика»

Минск • МИТСО • 2015

УДК 33:518/519 (075.8)
ББК 65в631я73
Э40

Рекомендовано
к изданию научно-методическим советом
Международного университета «МИТСО»
(протокол 7 от 31.03.2015 г.)

Составитель:

А. П. Крачковский, доцент кафедры логистики Международного университета «МИТСО»

Рецензенты:

В. В. Игнатенко, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета;

Л. П. Фалько, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры маркетинга Международного университета «МИТСО»

Крачковский, А. П.

Э40 Эконометрика и экономико-математические методы и модели в логистике : учеб.-метод. пособие / сост. А. П. Крачковский. — Минск : Междунар. ун-т «МИТСО», 2015. — 142 с.

ISBN 978-985-497-287-2.

В издании изложены теоретические сведения по основным разделам дисциплины «Эконометрика и экономико-математические методы и модели», которые сопровождаются решением примеров содержательных количественных задач логистики с применением компьютеров, в среде широко распространенного программного средства Excel.

УДК 33:518/519 (075.8)
ББК 65в631я73

ISBN 978-985-497-287-2

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие поможет читателю со скромной математической подготовкой овладеть необходимыми теоретическими и практическими знаниями для решения широкого спектра количественных задач логистики – от содержательной постановки до реализации на компьютере – с использованием современных пакетов программ и интерпретации результатов расчетов.

Эконометрика и экономико-математические методы и модели (Э и ЭММ и М) в логистике основываются на принципе аналогии, т. е. возможности изучения реальной логистической задачи (экономического явления или объекта) не непосредственно, а через рассмотрение математической модели.

Практическими задачами экономико-математического моделирования в логистике являются:

– анализ экономических объектов, явлений и процессов;
– экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических явлений, процессов;
– выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов (пусть очень важным) в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами.

Важнейшим понятием при экономико-математическом моделировании является понятие адекватности модели, т. е. соответствия модели моделируемому объекту или процессу. Адекватность модели – в какой-то мере условное понятие, так как полного соответствия модели реальному объекту быть не может.

При моделировании имеется в виду не просто адекватность, но соответствие по тем свойствам, которые считаются существенными для исследования.

Проверка адекватности экономико-математических моделей является весьма серьезной проблемой, тем более что ее осложняет трудность измерения экономических величин.

Процесс экономико-математического моделирования включает в себя три структурных элемента:

1) объект исследования;
2) субъект (исследователь);
3) модель, опосредующую отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Рассмотрим общую схему процесса моделирования, состоящую из четырех этапов.

На первом этапе мы конструируем (или находим в реальном мире) другой объект – модель исходного объекта-оригинала. Этап построения модели предполагает наличие определенных сведений об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели определяются тем, что модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, поэтому любая модель замещает оригинал в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта или характеризующих его с разной степенью детализации.

На втором этапе модель выступает как самостоятельный объект исследования. Например, одну из форм такого исследования составляет проведение модельных экспериментов, при которых целенаправленно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала, которые отражены в данной модели.

Третий этап заключается в переносе знаний с модели на реальную логистическую задачу (оригинал), в результате чего мы формируем множество знаний об исходном объекте и при этом переходим с языка модели на язык оригинала.

С достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал можно лишь в том случае, если этот результат соответствует признакам сходства оригинала и модели (другими словами, признакам адекватности).

На четвертом этапе осуществляются практическая проверка полученных с помощью модели знаний и их использование, как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для его целенаправленного преобразования или управления им. В итоге мы снова возвращаемся к проблематике реальной логистической задачи.

Среди экономико-математических моделей особое место занимают **эконометрические модели**, параметры которой оцениваются средствами математической статистики. Эта модель выступает в качестве средства анализа и прогнозирования реальных задач логистики на основе статистической информации. Эконометрические модели можно классифицировать по ряду классификационных признаков. Так, по аналитической форме модели (уравнения) выделяют линейные, нелинейные, степенные модели и др.

Для решения задач логистики наиболее часто используются **регрессионные** модели, основанные на уравнении регрессии, или системе регрессионных уравнений, связывающих величины эндогенных (внутренних, выходных) и экзогенных (внешних, входных) переменных.

Различают уравнения (модели) **парной** и **множественной регрессии**. Если для обозначения эндогенных переменных использовать букву y, а для экзогенных переменных букву x, то в случае линейной модели уравнение парной регрессии имеет вид $y = a_0 + a_1 x$, а уравнение множественной регрессии: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – параметры модели.

1. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ Э И ЭММ И М В ЛОГИСТИКЕ

Пример 1 (*задача об экономной упаковке*). Необходимо изготовить цилиндрическую упаковку для жидкой продукции заданного объема с минимальным расходом материала.

Решение. Обозначим через d диаметр цилиндрической упаковки, через h – ее высоту. Тогда расход материала на ее изготовление определится площадью полной поверхности, которая слагается из площадей двух кругов, боковой поверхности и выражается формулой:

$$S = 2 \times \pi \times d^2/4 + \pi \times d \times h.$$

Поскольку объем упаковки V задан, то на d и h наложено ограничение

$$V = \pi \times d^2/4\, h.$$

В результате приходим к экономико-математической модели задачи: минимизировать S при заданном ограничении на положительные значения d и h. Выражая из ограничения h через d

$$h = 4 \times \frac{V}{\pi \times d^2}.$$

Затем, подставив в формулу полной поверхности упаковки, получим:

$$S = \pi \times \frac{d^2}{2} + 4 \times \frac{V}{d}.$$

Для определения диаметра d, который минимизирует S, найдем ее производную и приравняем к нулю

$$S' = \pi \times d - 4 \times \frac{V}{d^2} = 0.$$

Откуда следует, что

$$d = \sqrt[3]{4 \times \frac{V}{\pi}},\ h = \sqrt[3]{4 \times \frac{V}{\pi}},\ S = \frac{3}{2} \times \pi \times (\frac{4 \times V}{\pi})^{2/3}.$$

Поскольку вторая производная функции S положительна, $S'' = \pi + + 8 \times \frac{V}{d^3}$, то полученные формулы показывают, что для экономной цилиндрической упаковки ее диаметр равен высоте. Эти формулы позволяют по заданному объему определять размер экономной упаковки и расход материала для ее изготовления. Например, для $V = 2$ л получаем

$$d = h = \sqrt[3]{4 \times 2000/3{,}14} = 13,657\ (\text{см}),$$

$$S = \frac{3}{2} \times 3{,}14 \times (\frac{4 \times 2000}{3{,}14})^{2/3} = 878,6\ (\text{см}^2).$$

Дополнительно рассмотрим вопрос, на сколько увеличивается расход материала для изготовления цилиндрической банки заданного объема при нарушении оптимальных пропорций (равенства диаметра и высоты) банки.

Полагаем $h = d \times l$, где l – коэффициент пропорциональности между высотой и диаметром цилиндрической упаковки. При $l = 1$ имеем экономную упаковку. Расход материала для изготовления и объем упаковки определяется выражениями

$$S = \pi \times d^2 \times \left(\frac{1}{2} + l\right), V = \pi \times \frac{d^3}{4} \times l.$$

Найдем выражение расхода материала S в зависимости от V и l

$$S = \pi \times \left(4 \times \frac{V}{\pi \times l}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} + l\right).$$

Рассмотрим три вида упаковок: 1) $l = 1$ – экономная упаковка; 2) $l = 2$ – высота в два раза больше диаметра, вытянутая упаковка; 3) $l = 0,5$ – высота в два раза меньше диаметра, сплюснутая упаковка.

Расход материала для каждого вида упаковки определяется соответственно

$$S_1 = \frac{3}{2} \times \pi \times \left(\frac{4 \times V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$S_2 = \frac{5}{2} \times \pi \times \left(\frac{2 \times V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$
$$S_{1/2} = \pi \times (\frac{8 \times V}{\pi})^{2/3}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{125}{108}} = 1{,}0499, \frac{S_{1/2}}{S_1} = \frac{2}{3} \times (2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} = 1{,}058.$$

Изготовление упаковки увеличивает расход материала для второго вида на 5 %, для третьего – почти на 6 %.

Пример 2 (*производственная задача*). Фабрика производит два вида красок – для наружных и для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок:

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т ингр./т краски		Запас, т /сут
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1	2	6
В	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более чем на 1 т.

Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны 3 тыс. у. е. для краски 1-го вида и 2 тыс. у. е. для краски 2-го вида.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение. Искомыми переменными задачи являются суточные объемы производства каждого вида красок:

x_1– суточный объем производства краски 1-го вида, т /сут;

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, т /сут.

Доход Z от продажи суточного объема производства краски представим в виде суммы дохода от продажи красок 1 и 2-го вида (при допущении независимости объемов сбыта красок): $Z = 3x_1 + 2x_2$ (тыс. у.е./сут).

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе

$$x_1 + 2 \times x_2 \le 6, \ 2 \times x_1 + x_2 \le 8;$$

- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более чем на 1 т краски

$$-x_1 + x_2 \le 1;$$

- объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта,

$$x_2 \le 2;$$

- объемы производства красок не могут быть отрицательными

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

В результате приходим к следующей ЭММ:

$$max\ \{Z = 3x_1 + 2x_2\},$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$2\,x_1 + x_2 \le 8,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Для определения решения этой модели можно использовать **графический метод**. С этой целью построим прямые ограничения, вычислив координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (см. рис. 1).

$$x_1 + 2x_2 = 6, \ (1)$$
$$2\,x_1 + x_2 = 8, \ (2)$$
$$-x_1 + x_2 = 1, \ (3)$$
$$x_2 = 2, \ (4)$$

Определим область допустимых решений неравенств ограничений. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, содержащую точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 1). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, является многоугольник ABCDEF. Построим прямую L целевой функции (ЦФ), например:

$$3x_1 + 2x_2 = 6.$$

На рис. 1 она показана пунктирной линией. По коэффициентам ЦФ строим вектор $\overrightarrow{C}$ из точки (0; 0) в точку (3; 2).

Точка E – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDEF, через которую проходит целевая прямая L, двигаясь по направлению вектора C, поэтому E – это точка максимума ЦФ. Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Получим $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$ – решение примера 2. Максимальное значение ЦФ равно $Z = 3 \times \frac{10}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$.

Таким образом, наилучшей производственной программой фирмы является ежесуточное производство краски 1-го вида в объеме $3\frac{1}{3}$ т и краски 2-го вида в объеме $1\frac{1}{3}$ т. Доход от продажи красок составит $12\frac{2}{3}$ тыс. у.е. в сутки.

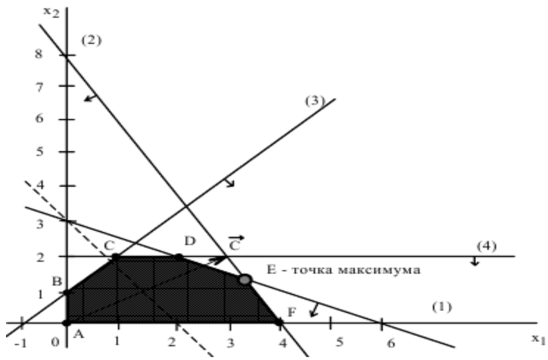


Рисунок 1. Область допустимых решений

Отметим, что построенные в примерах 1 и 2 модели являются оптимизационными, поскольку в них ищут значения переменных (неизвестных), которые минимизируют или максимизируют значения **целевых функций** (ЦФ) S, Z. Модель примера 1является **нелинейной**, а модель примера 2 **линейной.** Здесь переменные присутствуют только в первой степени.

2. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

2.1. Задачи эконометрики

Эконометрика – это наука, в которой на базе реальных статистических данных строятся, анализируются и совершенствуются математические модели реальных экономических явлений.

Название «эконометрика» было введено в 1926 г. норвежским экономистом и статистиком Рагнаром Фришем. В буквальном переводе этот термин означает «измерения в экономике».

Эконометрика как научная дисциплина зародилась и получила развитие на основе слияния экономической теории, математической экономики, экономической и математической статистики.

Предмет исследования эконометрики – экономические явления. Но в отличие от экономической теории эконометрика делает упор на количественные, а не качественные аспекты этих явлений. Основным инструментом эконометрических исследований является аппарат математической статистики.

К основным задачам эконометрики можно отнести следующие:

1) построение эконометрических моделей, т.е. представление экономических моделей в математической форме, удобной для проведения эмпирического анализа. Данную проблему принято называть проблемой спецификации;
2) оценка параметров построенной модели, делающих выбранную модель наиболее адекватной реальным данным. Это так называемый этап параметризации;
3) проверка качества найденных параметров модели и самой модели в целом. Этот этап анализа называют этапом верификации;
4) использование построенных моделей для объяснения поведения исследуемых экономических показателей, прогнозирования и предсказания, а также осмысленного проведения экономической политики.

Прогнозирование (предсказание, предвидение) по своему характеру неразрывно связано со временем. Посредством прогноза мы пытаемся разглядеть будущее в настоящем. Способы такого «заглядывания в будущее» весьма разнообразны: интуиция и исторические аналогии, экспертные оценки, применение эконометрических моделей и др. Выбор способа зависит от множества факторов: наличия данных (количественное выражение накопленного в прошлом опыта), планируемого момента исполнения и желаемой точности прогноза, стоимостных затрат на его составление. Прогноз может быть *краткосрочным* (до года, обычно на квартал), *среднесрочным* (от года до трех лет), *долгосрочным* (на три года и более). Методы составления прогнозов условно разбивают на две группы: количественные и качественные.

Количественные методы прогнозирования (*quantitative methods*) строятся на определенных процедурах обработки числовых массивов данных (как значительных по объему, так и сравнительно небольших). Они подразделяются на методы анализа временных рядов и каузальные (причинно-следственные).

Качественные (экспертные) *методы прогнозирования* (*qualitative methods*) основываются на использовании мнений специалистов в соответствующих областях (экспертов).

2.2. Методы анализа временных рядов

Временным (динамическим, или хронологическим) рядом называется последовательность значений некоторого показателя, например объемов продаж, во времени.

Различают два вида временных рядов: моментные, когда значения рассматриваемого показателя $x_1, x_2, ..., x_n$ отнесены к определенным моментам времени $t_1, t_2, ..., t_n$ ($t_1 < t_2 < ... < t_n$), и интервальные, когда значения показателя соответствуют промежуткам времени, интервалам $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$.

Временные ряды обычно задаются при помощи таблиц строковых либо столбцовых:

а) моментный временной ряд

Момент времени	t_1	t_2	....	t_n
Значение показателя	x_1	x_2	....	x_n

б) интервальный временной ряд

Промежуток времени	$[t_0, t_1]$	$[t_1, t_2]$		$[t_{n-1}, t_n]$
Значение показателя	x_1	x_2	....	x_n

Можно дать графическое изображение временного ряда: горизонтальная ось определяет моменты или промежутки времени, а вертикальная – значения показателя.

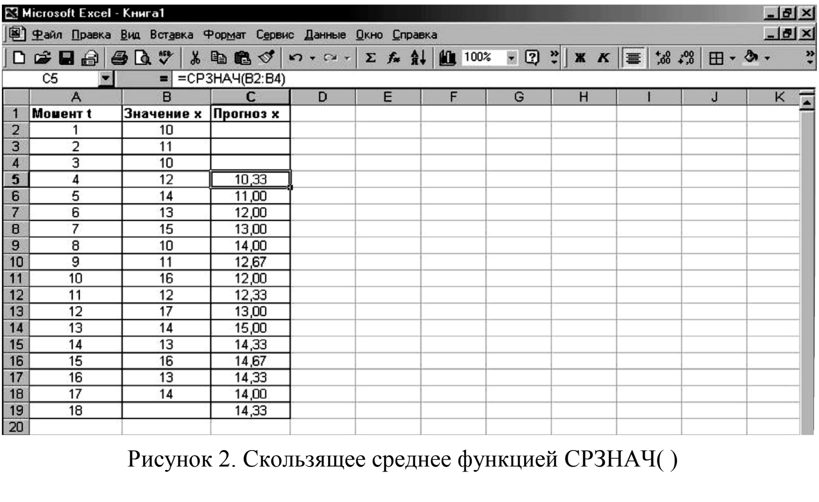
Прогнозирование временных рядов осуществляется при наличии значительного количества реальных значений рассматриваемого показателя из прошлого при условии, что наметившиеся в прошлом тенденции относительно стабильны. Рассмотрим три метода прогнозирования временных рядов.

1. ***Метод подвижного (скользящего) среднего*** (*simple moving average*) состоит в том, что расчет показателя на прогнозируемый момент (промежуток) времени строится путем усреднения значений этого показателя за несколько предшествующих моментов (промежутков) времени. Например, если вы выбрали подвижное среднее за три месяца, прогнозом на май будет среднее значение показателей за февраль, март, апрель. Выбрав в качестве метода прогнозирования подвижное среднее за четыре месяца, майское значение показателя оценивается как среднее за январь, февраль, март и апрель. Для общего случая расчетная формула прогнозного значения показателя имеет вид

$$\tilde{x}_k = \frac{x_{k-N} + x_{k-N+1} + \ldots + x_{k-1}}{N},$$

где $\tilde{x}_k$ – прогнозное значение показателя в момент (промежуток) времени k, $2 \le k \le n$, $1 < N < k$.

В электронных таблицах *Excel* имеется функция СРЗНАЧ( ), посредством которой можно вычислить прогнозные значения временного ряда. Полагаем, что временной ряд определен на рабочем листе *Excel* в столбцах А и В, как показано на рис. 2.



	A	B	C
1	Момент t	Значение x	Прогноз x
2	1	10	
3	2	11	
4	3	10	
5	4	12	10,33
6	5	14	11,00
7	6	13	12,00
8	7	15	13,00
9	8	10	14,00
10	9	11	12,67
11	10	16	12,00
12	11	12	12,33
13	12	17	13,00
14	13	14	15,00
15	14	13	14,33
16	15	16	14,67
17	16	13	14,33
18	17	14	14,00
19	18		14,33
20			

Рисунок 2. Скользящее среднее функцией СРЗНАЧ( )

Для того чтобы получить прогноз со средним скольжением, равным трем единицам времени, в ячейку С5 рабочего листа введем формулу = СРЗНАЧ (В2:В4). Затем с помощью средства *Автозаполнение* копируем и вставляем эту формулу в ячейки С6:С19 (см. рис. 2). В результате получаем прогнозные значения в столбце С. Более того, при $t=18$ имеем только прогнозное значение показателя x.

Другим способом получения прогнозных значений временного ряда является использование надстройки *Пакет анализа* для *Excel*. Необходимо проделать следующие операции.

Выбрать команду *Данные* $\Rightarrow$ *Анализ данных.*

Появится диалоговое окно *Анализа данных*, в котором содержатся все доступные функции анализа данных. Из списка выбирается инструмент *Скользящее среднее,* нажимается кнопка ОК.

Появиться диалоговое окно *Скользящее среднее,* как на рис. 3.

В поле *Входной интервал* указывается диапазон, где расположены значения показателя временного ряда. В *Интервал* вводится количество единиц времени, которые включаются в подсчет скользящего среднего.

В поле *Выходной интервал* вводится адрес ячейки, с которой начинается вывод прогнозных значений временного ряда.

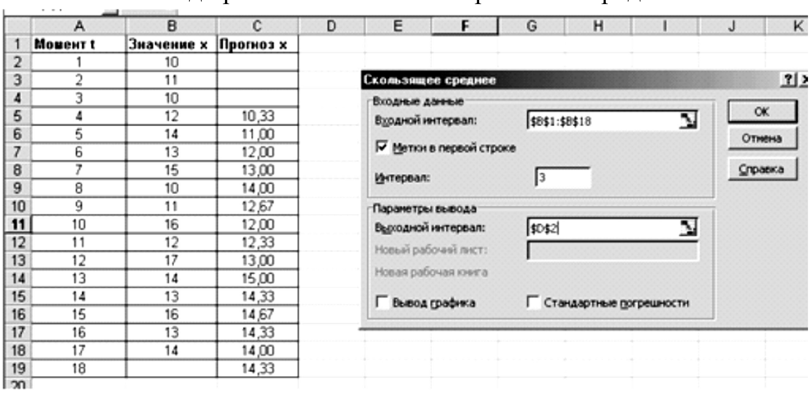


Рисунок 3. Скользящее среднее надстройкой «Анализ данных»

Дополнительно в диалоговом окне, представленном на рис. 3, можно указать требования о выводе графика, стандартной погрешности.

2. Метод экспоненциального сглаживания (*exponential smoothing*) при расчете прогноза учитывает отклонение предыдущего прогноза показателя от реального значения. Расчет прогноза производится по формуле:

$$\tilde{x}_k = \tilde{x}_{k-1} + \alpha\,(x_{k-1} - \tilde{x}_{k-1}),$$

где k – временной период (например, 1-й месяц, 2-й месяц и т. д.); x_{k-1}, $\tilde{x}_{k-1}$ – это реальное значение показателя и его прогноз для момента времени $k-1$; $\tilde{x}_k$ – отражает прогноз для временного периода k; α – константа сглаживания ($0 < \alpha < 1$), которая определяет степень сглаживания и подбирается методом проб и ошибок.

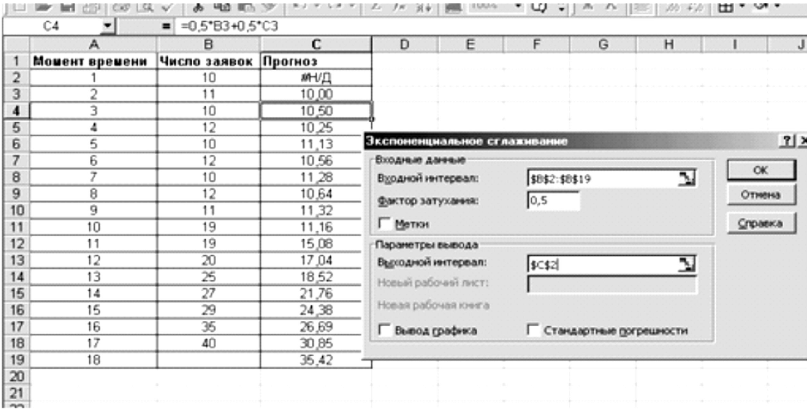
Сглаживание очень полезно в тех случаях, когда во временном ряду наблюдаются существенные различия в уровнях данных. Это явление известно под названием выброса значения показателя. При прогнозе, выполненном с помощью сглаживания, фактический временной ряд отслеживается довольно точно.

Пакет анализа в Excel поддерживает метод прогнозирования типа «сглаживание», который реализован функцией *Экспоненциальное сглаживание.* Активизировать эту функцию можно выбрав команду *Данные* ⇒ *Анализ данных.* Покажем это на следующем примере.

Пример 3 (*прогнозирование числа заявок*). Предприятие производит строительные материалы. По мере приближения весны тенденция числа заявок клиентов на материалы меняется – их количество резко возрастает. Необходимо определить прогнозное значение числа заявок с учетом резкого увеличения их количества.

Решение. Данные временного ряда, диалоговое окно функции *Экспоненциальное сглаживание,* а также результаты прогноза показаны на рис. 4.

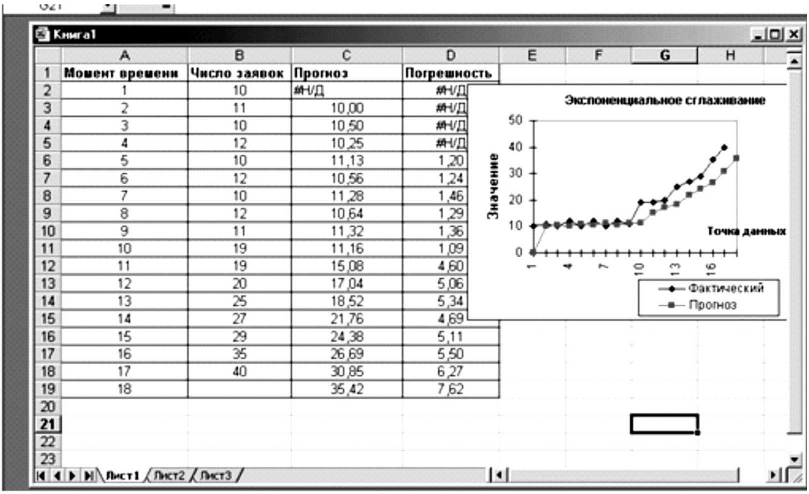
Отметим, что фактор затухания в диалоговом окне *Экспоненциальное сглаживание* и α – константа сглаживания связаны между собой следующим образом. Фактор затухания равен 1 – α, т. е. если известен фактор затухания, то можно вычислить константу сглаживания, и наоборот. *Excel* производит вычисления с помощью параметра *фактор затухания*. Для составления прогноза на период, следующий за последним показателем временного ряда, в текстовое поле *Входной интервал* диалогового окна *Экспоненциальное сглаживание* необходимо ввести на одну строку больше, чем занимает временной ряд (см. рис. 4).



	A	B	C
1	Момент времени	Число заявок	Прогноз
2	1	10	#Н/Д
3	2	11	10,00
4	3	10	10,50
5	4	12	10,25
6	5	10	11,13
7	6	12	10,56
8	7	10	11,28
9	8	12	10,64
10	9	11	11,32
11	10	19	11,16
12	11	19	15,08
13	12	20	17,04
14	13	25	18,52
15	14	27	21,76
16	15	29	24,38
17	16	35	26,69
18	17	40	30,85
19	18		35,42

Рисунок 4. Экспоненциальное сглаживание по формуле

Если в диалоговом окне рис. 4 дополнительно указать требования о выводе графика стандартной погрешности, получим информацию, представленную на рис. 5.



	A	B	C	D
1	Момент времени	Число заявок	Прогноз	Погрешность
2	1	10	#Н/Д	#Н/Д
3	2	11	10,00	#Н/Д
4	3	10	10,50	#Н/Д
5	4	12	10,25	#Н/Д
6	5	10	11,13	1,20
7	6	12	10,56	1,24
8	7	10	11,28	1,46
9	8	12	10,64	1,29
10	9	11	11,32	1,36
11	10	19	11,16	1,09
12	11	19	15,08	4,60
13	12	20	17,04	5,06
14	13	25	18,52	5,34
15	14	27	21,76	4,69
16	15	29	24,38	5,11
17	16	35	26,69	5,50
18	17	40	30,85	6,27
19	18		35,42	7,62

Рисунок 5. Экспоненциальное сглаживание надстройкой «Анализ данных»

3. Метод проецирования тренда (*trend projection*) определяет прямую (тренд), которая в среднем наименее уклоняется от массива точек $(t_i, x_i), i = 1,2,..., n$ заданного временного ряда. Эта прямая ищется в виде $x = a \cdot t + b$, a и b – постоянные, подлежащие определению. Коэффициенты *a* и *b* находят из условия

$$\sum_{i=1}^{n} (a \cdot t_i + b - x_i)^2 \to \min .$$

В результате для неизвестных *a* и *b* получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} x_i ; \\ a\sum t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} x_i t_i . \end{cases}$$

Эта система, как правило, имеет единственное решение. Средства *Excel* позволяют определять коэффициенты *a* и *b*, не решая непосредственно указанную систему уравнений.

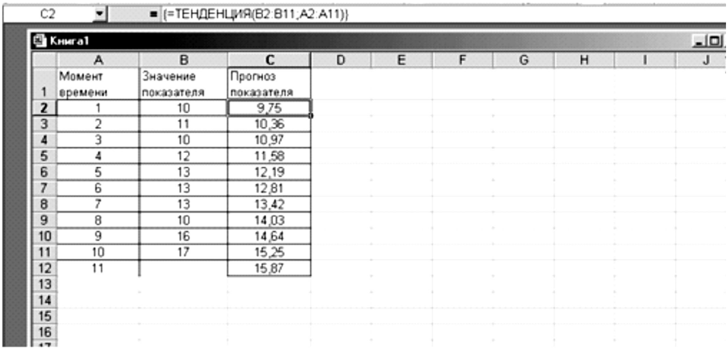
Статистическая функция ЛИНЕЙН рабочего листа *Excel* определяет параметры линейного тренда *a* и *b*. Порядок вычисления следующий:

1) на рабочий лист ввести данные временного ряда, столбец (строку) моментов времени и столбец (строку) значений показателя;
2) на этом же рабочем листе выделить область пустых ячеек размером 1×2 (1 строка, 2 столбца) для вывода результатов *a* и *b*;
3) на панели инструментов необходимо щелкнуть по кнопке *Вставка функции,* появится диалоговое окно функций Excel;
4) в окне *Категория* требуется выбрать *Статистические*, а в окне *Функция* – ЛИНЕЙН, затем нажать кнопку ОК;
5) в появившемся диалоговом окне заполнить аргументы функции ЛИНЕЙН (*область значений показателя x; область значений моментов времени t; константа*; 0), где константа равна 1 при расчете *a* и *b* обычным способом, константа равна 0 в предположении *b* = 0; нажать на комбинацию клавиш <Ctrl>+<Shift>+<Enter>.

В выделенной области пустых ячеек появятся значения коэффициентов *a* и *b*.

Функция рабочего листа ТЕНДЕНЦИЯ – это простой способ определения значений показателя *x*, согласно уравнению прямой $x = a \cdot t + b$, не определяя явного вида уравнения. Проиллюстрируем это следующим примером.

Информация временного ряда показана в столбцах А и В рабочего листа, изображенного на рис. 6.



C2 = {=ТЕНДЕНЦИЯ(B2:B11;A2:A11)}

Книга1

	A	B	C
1	Момент времени	Значение показателя	Прогноз показателя
2	1	10	9,75
3	2	11	10,36
4	3	10	10,97
5	4	12	11,58
6	5	13	12,19
7	6	13	12,81
8	7	13	13,42
9	8	10	14,03
10	9	16	14,64
11	10	17	15,25
12	11		15,87

Рисунок 6. Проецирование тренда функцией ТЕНДЕНЦИЯ( )

В выделенные ячейки C2:C11 вводится =ТЕНДЕНЦИЯ (B2:B11; A2:A11), используя формулу массива (напомним, что для ввода формулы массива необходимо нажать комбинацию клавиш <Ctrl+Shift + + Enter >), получим результат указанный на рис. 9 в ячейках C2:C11.

Для составления прогноза на период, следующий за последним показателем временного ряда (т. е. на тот период времени, для которого еще нет реального значения показателя), в ячейку A12 необходимо ввести число 11, а в C12 – формулу =ТЕНДЕНЦИЯ (B2:B11; A2:A11;A12), затем нажать клавишу Enter. Полученное значение 15,87 в ячейке C12 является прогнозом на основе фактических данных на пока еще не наступивший одиннадцатый временной отсчет.

Существует возможность одновременного прогнозирования значений показателя x для нескольких новых временных моментов. Например, можно ввести числа 11–20 в ячейки A12:A21, а затем в выделенные ячейки C12:C21 ввести формулу = ТЕНДЕНЦИЯ (B2:B11; A2:A11;A12:A21). *Excel* определит в ячейках C12:C21 прогнозные значения показателя x на временные моменты с 11 по 20. Данный прогноз будет основан на связях между реальными значениями показателя временного ряда.

Функция ТЕНДЕНЦИЯ вычисляет прогнозы, основанные на линейной связи между показателем и временем. Убедиться, что временной ряд определяется линейной взаимосвязью, можно с помощью построения графика $x = f(t)$ средствами *мастера диаграмм*. Если линия на графике прямая, то взаимосвязь линейная. В противном случае взаимосвязь показателя и времени является нелинейной и функция *Excel* РОСТ дает более точный прогноз направления развития бизнеса, чем при использовании функции ТЕНДЕНЦИЯ. Поскольку процесс использования функции РОСТ тот же, что и функции ТЕНДЕНЦИЯ, здесь не приводится пример, иллюстрирующий ее применение.

2.3. Каузальные, или причинно-следственные, методы прогнозирования

Используются в тех случаях, когда прогнозируемый показатель является функцией не только времени, но и других факторов. Например, объемы продаж товара могут зависеть не столько от времени, сколько от цены продукта, затрат на рекламу, действий конкурентов, уровня доходов и др. Если связи между этими переменными удается описать математически корректно, то точность каузального прогноза может оказаться довольно высокой. Как правило, это требует больших объемов информации и существенно больших интеллектуальных, временных и финансовых затрат, чем анализ временных рядов. Реализация каузальных методов прогнозирования требует обязательного применения средств вычислительной техники и современных программных средств.

В основе каузальных методов находятся корреляционный и регрессионный анализы. В ***корреляционном анализе*** измеряется близость взаимосвязи двух или более переменных. Здесь нет ничего такого, что могло бы использоваться для установления причинной обусловленности. Все, чего можно здесь добиться, – установить меру (степень) связи или корреляции между переменными. ***Регрессионный анализ*** используется для вывода уравнения, которое связывает зависимую переменную – критерий (некоторый показатель) с одной или более независимыми переменными – предикторами.

Выводы о причинности (какая переменная является причиной, а какая следствием) должны делаться из основополагающих знаний и теорий, касающихся самого маркетингового исследования.

Пакет анализа Excel содержит программные средства, с помощью которых реализуются корреляционный и регрессионный анализы. Рассмотрение этих средств проведем на конкретном примере из сферы бизнеса.

Пример 4 (*прогнозирование объемов продаж*). Предприятие использует оптовых торговцев для распределения своей продукции и в дополнение к их усилиям прибегает к персональным продажам и коротким рекламным телевизионным роликам. Оно заинтересовано в исследовании эффективности маркетинговых, логистических усилий. В качестве меры оценки эффективности берется ежегодный объем продаж по территориям. Данные и информация о количестве торговых представителей, обслуживающих территорию, находятся в регистрационных файлах предприятия и всегда готовы для обработки. Другие характеристики, которые производитель считает необходимым связать с объемами продаж своей продукции – эффективность действия коротких телевизионных роликов и деятельность оптовиков, – определить труднее. Для получения информации по этим характеристикам исследователи должны проанализировать графики показа роликов и изучить охват территории телевизионным сигналом; установить рейтинги оптовиков по ряду критериев и рассчитать совокупный рейтинг.

Данные случайным образом определенной выборки объемом 25 территорий представлены в таблице 1.

Влияние каждой переменной на объем продаж исследуем с помощью графического представления. В результате получим совокупность графиков, изображенных на рис. 7–9.

Таблица 1

Данные выборочного исследования

Территория	Продажа (тыс. шт.) Y	Реклама (число показов в мес.) X1	Число оптовиков X2	Индекс эффективности оптовика X3
1	260,3	5	3	4
2	286,1	7	5	2
3	279,4	6	3	3
4	410,8	9	4	4
5	438,2	12	6	1
6	315,3	8	3	4
7	565,1	11	7	3
8	570	16	8	2
9	426,1	13	4	3
10	315	7	3	4
11	403,6	10	6	1
12	221,5	4	4	1
13	343,6	9	4	3
14	644,6	17	8	4
15	520,4	19	7	2
16	329,5	9	3	2
17	426	11	6	4
18	343,2	8	3	3
19	270,1	5	3	2
20	525,3	17	7	4
21	283,5	8	3	3
22	332,2	10	4	3
23	393,2	12	5	3
24	556,1	12	7	1
25	418,8	12	9	2

На рис. 7 видно, что объем продаж возрастает с увеличением числа рекламных телевизионных демонстраций ежемесячно. Рисунок 8 свидетельствует о росте объема продаж с увеличением числа торговых представителей, обслуживающих территорию. Из рис. 9 видно, что имеет место слабое взаимодействие между объемом продаж на территории и эффективностью деятельности обслуживающего эту территорию оптовика.

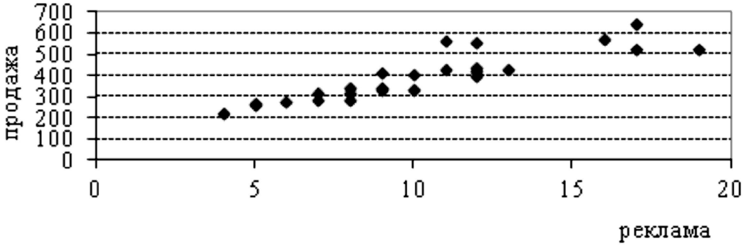


Рисунок 7. Зависимость объема продажи от числа показов рекламы

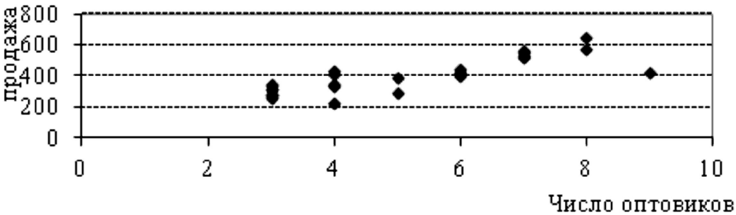


Рисунок 8. Зависимость объема продажи от числа оптовиков

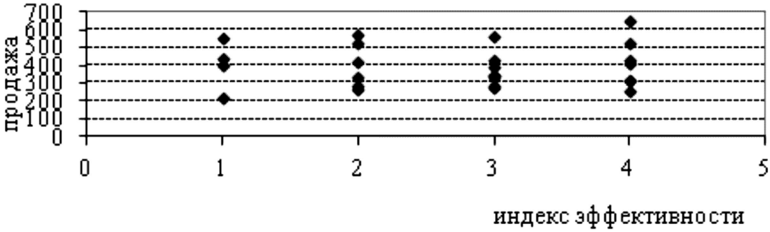


Рисунок 9. Зависимость объема продажи от индекса эффективности

Подтвердим выводы графического представления с помощью инструментов корреляционного анализа. С этой целью выполним следующие операции.

1. Выбираем команду Данные $\Rightarrow$ Анализ данных.

Из списка функций выбирается функция Корреляция – ОК.

Появиться диалоговое окно Корреляция, как на рис. 10.

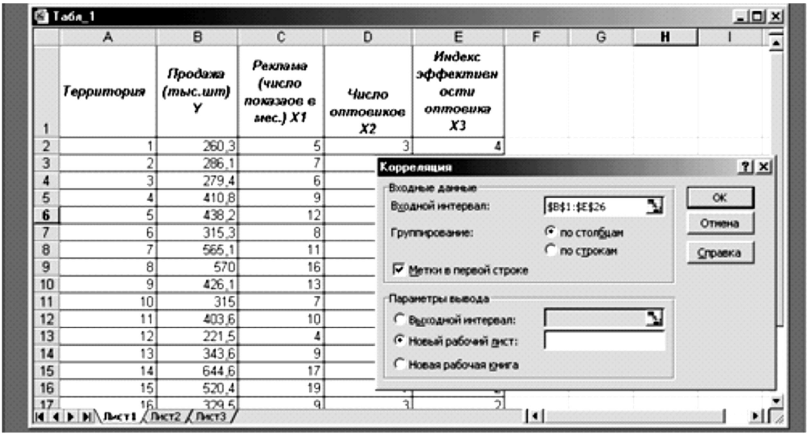


Рисунок 10. Корреляционный анализ надстройкой «Анализ данных»

В поле *Входной интервал* указывается диапазон с данными переменных, между которыми исследуется взаимосвязь, включая название переменных. Ставится флажок *Метки* в первой строке, показывающий, что первая строка указанного диапазона содержит название переменных.

4. В *Параметрах вывода* указывается место, где расположены результаты корреляционного анализа. Нажимается кнопка ОК.

Результаты функции Корреляция представлены в таблице 2.

Таблица 2

Коэффициенты корреляции

Переменные	Продажа (тыс.шт) Y	Реклама (число показов в мес.) X1	Число оптовиков X2	Индекс эффективности оптовика X3
Продажа (тыс. шт.) *Y*	1			
Реклама (число показов в мес.) X1	0,8804	1		
Число оптовиков X2	0,8278	0,7675	1	
Индекс эффективности оптовика X3	0,0101	0,0194	–0,2432	1

Значения коэффициентов парной корреляции, расположенных в столбце Продажа, показывают, что между функцией Y и переменными X1, X2 имеет место прямая линейная зависимость, а между *Y* и *X3* такая связь отсутствует.

Основываясь на этих выводах, будем искать зависимость объемов продаж от рекламы (число показов телероликов в месяц) и числа оптовиков на определенной территории в виде $Y = a + b_1\mathrm{X1} + b_2\mathrm{X2}$, где a, b_1, b_2 – пока неизвестные коэффициенты. Определим коэффициенты с помощью функции *Регрессия* из *Анализа данных*. Для этого выполним следующие операции.

1. Выбрать команду *Данные* $\Rightarrow$ *Анализ данных.* Из списка функций выбирается *Регрессия,* нажимается кнопка ОК.

2. В диалоговое окно *Регрессия* (см. рис. 11) ввести информацию: в поле *Входной интервал Y* (функция) указывается диапазон с данными столбца Продажа из табл. 1, включая название столбца. В поле *Входной интервал* X указывается диапазон с названием и данными столбцов X1, X2. Флажок *Метки* показывает, что первая строка указанных диапазонов содержит названия столбцов.

4. В *Параметрах вывода* указывается место, где расположены результаты регрессионного анализа. Нажимается кнопка ОК.

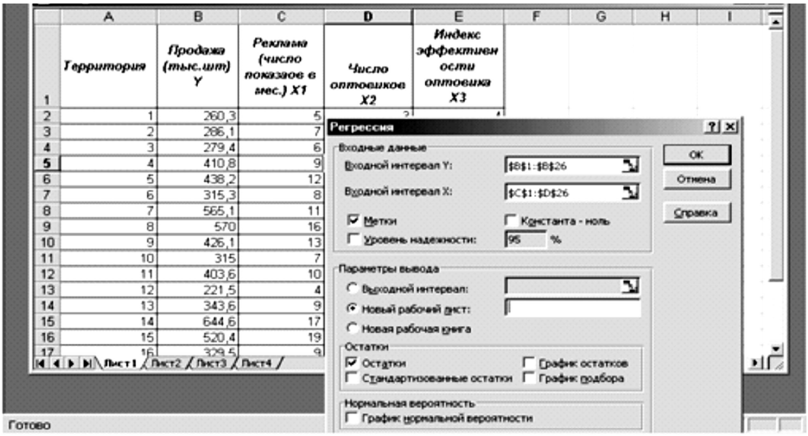


Рисунок 11. Регрессионный анализ надстройкой «Анализ данных»

Результаты выполнения функции *Регрессия* представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Значение коэффициентов a, b_1, b_2

	Коэффи-циенты	Стандартная ошибка	T – статистика	P – значение	Нижние 95 %	Верхние 95 %
Y-пересечение – a	108,86	29,24	3,72	0,00	48,22	169,51
Реклама (число показов в мес.) X1– b_1	17,23	3,94	4,37	0,00	9,05	25,41
Число оптовиков X2– b_2	21,83	8,05	2,71	0,01	5,13	38,53

Уравнение регрессии для прогноза объемов продаж в зависимости от числа показов телерекламы и числа оптовиков на территории имеет вид

$$\mathrm{Y} = 108{,}86 + 17{,}23 \cdot \mathrm{X1} + 21{,}83 \cdot \mathrm{X2}.$$

На основании уравнения получаем таблицу 4.

Таблица 4

Прогнозные значения продаж и их погрешности

Территория	Предсказанные объемы продаж (тыс. шт.) Y	Остатки	Территория	Предсказанные объемы продаж (тыс. шт) Y	Остатки
1	260,49	–0,19	13	351,23	–7,63
2	338,61	–52,51	14	576,38	68,22
3	277,72	1,68	15	589,01	–68,61
4	351,23	59,57	16	329,41	0,09
5	446,58	–8,38	17	429,35	–3,35
6	312,18	3,12	18	312,18	31,02
7	451,18	113,92	19	260,49	9,61
8	559,15	10,85	20	554,55	–29,25
9	420,15	5,95	21	312,18	–28,68
10	294,95	20,05	22	368,46	–36,26
11	412,12	–8,52	23	424,75	–31,55
12	265,09	–43,59	24	468,41	87,69
			25	512,06	–93,26

В столбце Остатки приводятся разности между реальными и прогнозными значениями объемов продаж.

Функция *Регрессия* определяет коэффициент детерминации R2=0,8315=83,15 %, который показывает долю вариации переменной критерия (в нашем случае объем продаж Y), которая может быть отнесена на счет изменения (ковариации) переменных-предикторов, т. е. переменных X1 и X2.

В процессе регрессионного анализа проверяется значимость уравнения регрессии. Для множественной регрессии, как в нашем случае, рассмотрение значимости общей регрессии с использованием F-проверки является обязательным. Расчетное значение F для регрессии объема продаж на количество показов рекламы по телевидению и числа торговых представителей равно 54,26. Поскольку расчетное значение F превышает его критическое значение $3{,}12 \cdot 10^{-9}$, то нулевая гипотеза об отсутствии взаимосвязи отвергается. Следовательно, существует статистически значимая линейная взаимосвязь между объемом продаж и количеством показов рекламы по телевидению, числом торговых представителей.

2.4. Качественные методы прогнозирования

Тенденции развития экономики, наблюдаемые в последние годы, позволяют сделать некоторые выводы относительно прогнозирования ее показателей:

- повышается необходимость качественных рыночных прогнозов и одновременно усложняется процесс получения исходной информации для разработки таких прогнозов;
- снижается ценность для разработки прогнозов устойчивых тенденций развития рынка в прошлом, поскольку эти тенденции не только не сохраняются, но иногда меняются на противоположные.

Основываясь на этих выводах, можно утверждать, что более эффективными являются **качественные (экспертные) методы прогнозирования**, которые на некоторых этапах реализации включают также количественные методы.

Сущность количественных методов прогнозирования заключается в сборе, обработке и использовании для различных целей информации, полученной от достаточно представительного числа компетентных лиц (экспертов), обладающих специальными знаниями, опытом по определенному явлению. Несмотря на то что мнение каждого эксперта субъективно, обобщение позволяет получить объективную оценку состояния или перспектив развития изучаемого явления, например рынка.

Процедура получения оценок от экспертов называется *экспертизой*. Подготовкой и проведением экспертизы занимается рабочая группа по программе, включающей следующие этапы:

определение цели и задач экспертизы;
формирование экспертной группы;
составление опросных листов, определение способа и процедуры опроса экспертов;
проведение опроса;
обработка и анализ информации, полученной от экспертов.

При прогнозировании состояния рынка и перспектив его развития важно правильно выбрать способ опроса экспертов и последующего обобщения их мнений. Чаще всего используют два следующих способа: индивидуальный и Дельфи (Delphy).

Индивидуальный метод опроса и обобщения оценок заключается в том, что каждый эксперт независимо от других дает оценку, а затем с помощью какого-либо правила, простейшее состоит в вычислении средней арифметической оценки, оценки обобщаются в одну. Этот метод экономичен и прост с организационной точки зрения, но применение его ограничено из-за недостаточной достоверности обобщенных оценок.

На практике экспертам предлагается либо выбрать один из нескольких вариантов прогноза, либо дать собственную количественную оценку. Именно во втором случае выявляется существенный недостаток индивидуального метода, который в определенной степени может быть устранен при использовании метода Дельфи.

Метод Дельфи имеет следующие особенности:
на первом этапе эксперт работает изолированно от других;
опрос экспертов проводится в несколько туров;
после каждого тура экспертов знакомят с оценками других экспертов и их средним значением при сохранении анонимности и подробной аргументации минимального и максимального значений оценок.

Решение о необходимости проведения последующих туров экспертизы и достоверности обобщенной оценки принимается исходя из значения коэффициента, который можно рассчитать по формуле:

$$k = 100 \cdot \frac{\sigma_y}{y_m},$$

где σ_y – среднее квадратичное отклонение оценок, $\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_m)^2 / n}$; y_i – индивидуальная оценка каждого эксперта;

$y_m = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$ – среднее значение оценок; n – число экспертов в группе.

Считается приемлемым коэффициент вариации, не превышающий 33 %.

Большинство прогнозных ошибок связано с предположением, что существующие тенденции сохраняются и в будущем. Однако такая стабильность в переходный период наблюдается весьма редко, поэтому маркетинговые исследования сталкиваются со все большими трудностями при прогнозировании спроса, конъюнктуры рынка. В связи с этим становится объективно необходимым использование подходов, объединяющих интуицию, воображение и количественные методы прогнозирования. Принято разрабатывать несколько вариантов развития ситуации, например при ухудшении конъюнктуры, ее улучшении и сохранении. Подобный подход позволяет повышать способность к предвидению, вносить в управление маркетинговыми мероприятиями дополнительную гибкость и маневренность, что в конечном счете приводит к снижению коммерческого риска в деятельности организации.

3. БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ

Основные макроэкономические показатели и их взаимосвязи хорошо описываются в **межотраслевом балансе производства и распределения продукции**. Первый межотраслевой баланс (МОБ) был опубликован в США в 1936 г и составлен американским экономистом русского происхождения Василием Леонтьевым, ставшим впоследствии лауреатом Нобелевской премии.

В основе межотраслевого баланса лежит так называемая модель затраты-выпуск (*input-output)*, при разработке которой В. Леонтьев использовал опыт составления баланса народного хозяйства СССР за 1923–1924 гг.

С теоретической точки зрения МОБ представляет собой экономико-математическую модель процесса воспроизводства, которая в развернутом виде отражает взаимосвязи по производству, распределению и накоплению общественного продукта в разрезе отраслей народного хозяйства и в единстве материально-вещественного и стоимостного секторов воспроизводства.

Министерство статистики и анализа Республики Беларусь начиная с 1993 года ежегодно, с опозданием на два года, публикует статистические сборники «Межотраслевой баланс производства и распределения продукции и услуг» в разрезе 38 основных отраслей народного хозяйства. Эти отчетные МОБ разрабатываются по международной системе национальных счетов, которая принята в Организации Объединенных Наций. В частности, МОБ отражает показатели следующих отраслей: химической и нефтехимическои промышленности; промышленности строительных материалов, включая стекольную и фарфорофаянсовую; лесной, деревообрабатывающей и целлюлозно-бумажной промышленности; лесного хозяйства.

МОБ строится в виде числовых матриц – прямоугольных таблиц чисел, среди которых выделяются три основные части (квадранты): внутренний (или первый) квадрант (I); боковое (или правое) крыло (II квадрант), нижнее крыло (III квадрант). IV квадрант не разрабатывается. Общая схема МОБ имеет следующий вид:

Промежуточное потребление (I квадрант)	Конечное использование (II квадрант)
Добавленная стоимость (III квадрант)	(IV квадрант)

В квадранте I по строкам и столбцам записываются отрасли экономики. В столбцах по каждой отрасли представлены затраты на производство товаров, энергии и услуг (стоимость сырья, материалов, топлива, энергии, услуг), а по строкам показано распределение продукции каждой отрасли между всеми отраслями.

В квадранте II строки соответствуют отраслям-потребителям. Столбцы представляют собой категории конечного использования: конечное потребление (расходы на конечное потребление домашних хозяйств, государственного управления и некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства), валовое накопление (валовое накопление основного капитала, изменение запасов материальных оборотных средств, чистое приобретение ценностей), показатели экспорта, сальдо экспорта – импорта товаров и услуг.

В квадранте III представлена стоимостная структура ВВП. Столбцы этого квадранта соответствуют отраслям-производителям, а строки – основным стоимостным компонентам валовой добавленной стоимости (оплата труда наемных работников, валовая прибыль, валовой смешанный доход, налоги и субсидии на производство) и налогам, а также субсидиям на продукты.

Отметим, что если рассматривать информацию МОБ по вертикали, то в столбцах показывается стоимостная структура выпуска продукции отдельных отраслей. Она состоит из промежуточного потребления (квадрант I) и добавленной стоимости (квадрант III). По горизонтали – по строкам – натурально вещественный состав продукции, которая расходуется на промежуточное потребление (квадрант I) и конечное использование (квадрант II). Отметим особо, что для каждой отрасли экономики ресурсы продукции равны ее использованию.

VI квадрант МОБ, как правило, не содержит количественной информации. Детальное представление МОБ имеет следующий вид:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…..	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…….	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…….	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	……	x_{3n}	Y_3	X_3
.	.	.	.	……	…	…	…
.	.	.	.	…….	…	…	…
.	.	.	.	…….	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	……..	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	….	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	….	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3		m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3		X_n		

Следует отметить, что, хотя валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Если, как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой X с нижним индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_{i,} i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

где x_{ij} – материальный поток из i-й в j-ю отрасли.

Формула (1) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Из рассмотрения схемы баланса по столбцам можно сделать вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее добавленной стоимости равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j j = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Соотношение (2) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостный состав продукции всех отраслей.

Основу информационного обеспечения балансовой модели составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции.

Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное $a_{ij.}$ Величины $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, n$ называются **коэффициентами прямых материальных затрат** и рассчитываются следующим образом: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, i, j = 1, 2, \dots, n.$

С учетом формулы для a_{ij} систему уравнений баланса (1) можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_{i,} i = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$ вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец конечной продукции Y:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \ldots, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (3) в матричной форме примет вид:

$$X = A \times X + Y. \quad (4)$$

С экономической точки зрения суммы элементов матрицы А по столбцам не должны превосходить 1, поскольку это затраты на производство единицы продукции отрасли. Такая матрица А называется **продуктивной**.

Система уравнений (3), или в матричной форме (4), называется **ЭММ межотраслевого баланса** (балансовой или моделью Леонтьева, моделью «затраты–выпуск»). С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов.

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли, можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли:

$$Y = (E - A) \times X,$$

где E – единичная матрица одного порядка с матрицей A.

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли:

$$X = (E - A)^{-1} \times Y = B \times Y,$$

где $B = \|b_{ij}\| = (E - A)^{-1}$ – обратная матрица для $-(E - A)$, она называется матрицей коэффициентов полных затрат.

Отметим, что для продуктивной матрицы А существует матрица коэффициентов полных затрат.

Коэффициент полных материальных затрат b_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

3. Для ряда отраслей, задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых. В этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (4), а системой линейных уравнений (3).

Пример 5 (*анализ балансовой модели*). На основании данных МОБ таблицы рассчитать коэффициенты прямых и полных материальных затрат; определить отраслевые валовые выпуски, для обеспечения конечной продукции $y_1 = 65, y_2 = 30, y_3 = 30$.

Отрасли	Межотраслевые потоки			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	40	50	60
2	25	30	40	25
3	25	45	35	35

Решение. Исходные данные примера представим на рабочем листе *Excel*, кроме того, для результатов решения выделим необходимые области (см. рис. 12).

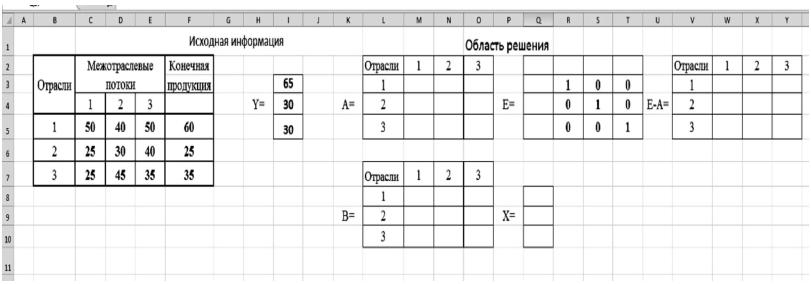


Рисунок 12. Исходные данные примера

Прежде чем определять матрицу коэффициентов прямых затрат, необходимо вычислить значения валовых выпусков отраслей. Для этого суммируем построчно значения межотраслевых потоков и величин конечной продукции. Валовые выпуски отраслей: $x_1 = 250$, $x_2 = 180, x_3 = 155$. Отметим, что для определения значений валовых выпусков отраслей с помощью *Excel* используется функция суммирования, которая определена в клетках F5:F7 как =СУММ(B5:E5); =СУММ(B6:E6); =СУММ(B7:E7) соответственно. Столбцы матрицы А определяются делением столбцов матрицы межотраслевых потоков на соответствующие значения валовых выпусков отраслей, суммы коэффициентов прямых затрат по столбцам А равны 0, 5; 0, 96; 0, 89 –

матрица А продуктивная. Матрицу коэффициентов полных затрат В определяем посредством функции *Excel* МОБР() от матрицы Е–А. Искомые валовые выпуски вычисляем посредством функции Excel МУМНОЖ() от матриц В, Y (см. рис. 13).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1					Исходная информация					
2		Межотраслевые			Конечная	Валовой				
3	Отрасли	потоки			продукция	выпуск		65		
4		1	2	3			Y=	30		A=
5	1	50	40	50	60	200		30		
6	2	25	30	40	25	120				
7	3	25	45	35	35	140				
8										
9										B=
10										

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1				Область решения										
2	Отрасли	1	2	3							Отрасли	1	2	3
3	1	0,25	0,33	0,36			1	0	0		1	0,75	-0,33	-0,36
4	2	0,13	0,25	0,29	E=		0	1	0	E-A=	2	-0,13	0,75	-0,29
5	3	0,13	0,38	0,25			0	0	1		3	-0,13	-0,38	0,75
6		0,50	0,96	0,89										
7	Отрасли	1	2	3										
8	1	1,84	1,55	1,46		209,6								
9	2	0,52	2,09	1,04	X=	127,83								
10	3	0,57	1,30	2,10		138,85								

Рисунок 13. Результаты решения примера 5

4. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

4.1. Линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения. Возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой.

Общая форма задач ЛП имеет следующий вид:

$$min \text{ или } max\{z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\}$$

при условиях (ограничениях)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\ge)(=)b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\ge)(=)b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\ge)(=)b_m.$$

Переменные, фигурирующие в линейных формах, могут быть неотрицательными, отрицательными или не иметь ограничений в знаке, поэтому задачи линейного программирования имеют несколько вариантов постановок.

Для решения задач ЛП разработан симплекс-метод, который реализован в виде программного средства, надстройки к Excel «Поиск решения». Результатом решения задачи ЛП может быть:

1) определение оптимальных значений переменных, которые минимизируют или максимизируют целевую функцию (ЦФ);
2) демонстрация, что ЦФ не ограничена снизу или сверху на области допустимых решений;
3) демонстрация, что область допустимых решений пуста, т.е. ограничения не совместны.

Рассмотрим применение программного средства «Поиск решения» для определения оптимального решения следующей задачи ЛП.

Пример 6 (*рациональное распределение ресурсов*). Распределить три вида материалов для производства четырех видов продукции с максимально возможной прибылью. Исходная информация приведена в таблице 5.

Таблица 5

Исходная информация

Вид продукции	Норма расхода материалов на 1 ед. продукции			Обязательный минимум выпуска продукции	Прибыль от реализации ед. продукции, у.е
	№ 1	№ 2	№ 3		
А	2	1	3	20	3
Б	2	3	4	25	3
В	3	5	6	Не лимит.	4
Г	4	2	6	Не лимит.	5
Ресурсы материалов	200	400	600		

Решение. Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 – количество единиц продукции вида А, Б, В, Г соответственно. Тогда экономико-математическую модель задачи можно записать следующим образом:

$$max\ \{ z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \}$$

при условиях

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 200;$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 400;$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 \le 600;$$

$$x_1 \ge 20,\ \ x_2 \ge 25,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0.$$

Данная модель является задачей ЛП, которую будем решать программой симплекс-метода.

Исходную информацию задачи и ЭММ переносим на рабочий лист Excel (см. рис. 12), далее применяем надстройку «Поиск решения». В результате получаем численное решение задачи (рис. 14). В ячейках C6, D6, E6 содержатся формулы:

СУММПРОИЗВ(C2:C5;K2:K5); =СУММПРОИЗВ(D2:D5;K2:K5); =СУММПРОИЗВ(E2:E5;K2:K5).

В ячейке I7 заложена формула: =СУММПРОИЗВ(I2:I5;K2:K5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			1	2	3		Заказ		Прибыль		X
2		А	2	1	3		20		3		75
3		Б	2	3	4		25		3		25
4		В	3	5	6		0		4		0
5		Г	4	2	6		0		5		0
6			200	150	325						
7		Ресурсы материалов	200	400	600			Z=	300		
8											
9											
10											

Рисунок 14. Результаты решения примера 6

Таким образом, для получения максимальной прибыли из имеющихся ресурсов необходимо изготовить продукцию А в количестве **75 ед.**, продукцию Б в количестве **25 ед.**, остальные виды продукции производить нецелесообразно. Величина максимального дохода равна **300 у.е**.

4.2. Содержательная постановка и ЭММ транспортной задачи по критерию стоимости

Имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы некоторого груза в количествах $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц соответственно, и n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, куда необходимо перевезти $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц указанного груза. Стоимость перевозки единицы груза из любого пункта отправления A_i, $i = 1,2,...,m$ до любого пункта назначения B_j, $j = 1, 2,..., n$ равна c_{ij}. Требуется составить план перевозок, суммарная стоимость которых при условии выполнения всех заявок будет минимальной.

В такой постановке показателем эффективности транспортной задачи (ТЗ) является суммарная стоимость перевозок, а сама задача называется ТЗ по **критерию стоимости**.

Составим математическую модель ТЗ. Пусть x_{ij} – количество единиц груза перевозимого из i-го пункта отправления A_i в j-й пункт назначения B_j, $i = 1,2,..., m, j = 1,2,..., n$. Величины x_{ij} называются перевозками. Понятно, что $x_{ij} \geq 0$, количество перевозимого груза не может быть отрицательным.

На перевозки x_{ij} накладываются ограничения, обусловленные количеством перевозимого груза:

а) количество груза вывозимого из i-го пункта отправления A_i во все пункты назначения, должно быть не больше запаса груза a_i

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1,2, \ldots, m;$$

б) количество груза ввозимого в j-ый пункт назначения B_j из всех пунктов отправления, должно быть не боль заявки на груз b_j, поданный в этом пункте

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, j = 1,2, \ldots, n.$$

Суммарная стоимость перевозок определяется формулой

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + +c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + +c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}.$$

И должна быть **минимальна.** Таким образом приходим к математической модели ТЗ

$$min\left\{z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \; i = 1,2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \; j = 1,2, \ldots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n.$$

В зависимости от соотношения между запасами (количеством вывозимого груза) и заявками (количеством ввозимого груза) ТЗ называется либо сбалансированной, либо несбалансированной. Если сумма всех заявок равна сумме всех запасов, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то *ТЗ называется сбалансированной*. В противном случае несбалансированной или открытой.

Для сбалансированной ТЗ экономико-математическую модель можно представить в виде.

$$min\left\{z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}\right\}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; i = 1,2, \dots, m; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; j = 1,2, \dots, n;$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2, \dots, j = 1,2, \dots, n.$$

4.3. Методы определения опорных планов перевозок

Совокупность перевозок $\{x_{ij}\}$ называется *планом перевозок*, или *планом*. План перевозок называется *допустимым*, если он удовлетворяет заданным ограничениям. План перевозок называется *оптимальным*, если соответствующая ему суммарная стоимость перевозок минимальна среди всех допустимых планов. При решении сбалансированной ТЗ всегда можно найти опорный оптимальный план. Рассмотрим некоторые методы построения допустимых опорных планов перевозок.

1. Метод северо-западного угла. Идея метода заключается в том, что заполнение клеток транспортной таблицы происходит последовательно, сначала вывозится груз из пункта A_1 и завозится в пункт B_1 и перевозке x_{11} присваивают максимально возможное значение, равное $min\ \{a_1, b_1\}$. Если заявка пункта B_1 выполнена полностью, а в пункте A_1 остался не вывезенный груз, то он вывозиться в пункт B_2 и т.д. Иначе говоря, если в пункте A_1 недостаточно груза для выполнения заявки пункта B_1, то остающаяся потребность перевозится из A_2 и т.д.

После того как заявка пункта B_1 выполнена полностью, заполняются клетки таблицы, соответствующие перевозке в пункт B_2 и т.д. По мере того как выполнены ограничения на вывоз (ввоз), все остальные клетки строки (столбца) исключаются из дальнейшего рассмотрения. В результате применения такого алгоритма полученная матрица будет удовлетворять ограничениям транспортной задачи. Отметим, что число повторений заполнений таблицы перевозок не превышает $m + n - 1$.

Пример 7 (*метод северо-западного угла*). Исходная информация ТЗ.

ПО/ПП	В1	В2	В3	В4	Запасы
А1	5	7	6	8	20
А2	6	7	8	5	25
А3	5	4	6	7	30
А4	6	5	7	4	15
А5	5	6	6	6	10
Заявки	15	35	35	15	

Определить план перевозок.

Решение. Результат метода северо-западного угла:

ПО/ПП	В1	В2	В3	В4	Запасы
А1	**15**	**5**			20
А2		**25**			25
А3		**5**	**25**		30
А4			**10**	**5**	15
А5				**10**	10
Заявки	15	35	35	15	

Значение ЦФ для данного плана перевозок равно 605.

2. Метод минимального элемента. Этот метод называют методом наименьшей стоимости или методом наименьшего расстояния. Заполнение клеток транспортной таблицы начинается с клетки, в которой значение тарифа (расстояния) минимально, например с клетки $\{ij\}$. В эту клетку записывается максимально возможное значение перевозки $x_{ij} = min\ \{a_i, b_j\}$.

Если заявка b_j пункта назначения B_j выполнена полностью, то j-й столбец исключается из дальнейшего рассмотрения. Если в пункте отправления A_i остался невывезенный груз, то он вывозится в другие пункты назначения с минимальным тарифом и т.д. Если в пункте A_i недостаточно груза для выполнения заявки пункта B_j, то остающаяся потребность перевозится из других пунктов и т.д. Число шагов заполнения таблицы не превышает $m + n - 1$.

На каждом шаге заполнения таблицы перевозок из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, заявка которого выполнена.

Пример 8 (*метод минимального элемента*). Исходная информация ТЗ совпадает с информацией примера 7. Определить план перевозок.

Решение. Результат метода минимального элемента:

ПО/ПП	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	**15**		**5**		20
A2			**25**		25
A3		**30**			30
A4				**15**	15
A5		**5**	**5**		10
Заявки	15	35	35	15	

Значение ЦФ для данного плана перевозок равно 545.

Приведенные методы формирования исходных опорных решений предполагают, что ТЗ является сбалансированной. Однако в реальных ситуациях часто встречаются задачи с несбалансированными значениями всех запасов и потребностей.

Баланс может нарушаться по двум причинам:

1) сумма запасов превышает сумму поданных заявок, $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$; ТЗ с избытком запасов;
2) сумма запасов меньше, чем сумма поданных заявок: $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$; ТЗ с избытком заявок (дефицитом продуктов).

Несбалансированная ТЗ может быть сведена к сбалансированной. Это можно сделать следующим образом. Ввести дополнительный фиктивный пункт назначения $B_ф$ или отправления $A_ф$ в случае задачи с избытком запасов или заявок соответственно и присвоить перевозкам, связанным с этими пунктами, нулевые тарифы. Определить для введенного фиктивного пункта либо заявки, либо запасы так, чтобы спрос равнялся предложению.

Пример 9 (*несбалансированная ТЗ*). Исходная информация ТЗ:

ПО/ПП	В1	В2	В3	В4	Запасы
А1	5	7	6	8	20
А2	6	7	8	5	25
А3	5	4	6	7	30
А4	6	5	7	4	15
А5	5	6	6	6	23
Заявки	15	35	35	15	

Определить план перевозок.

Решение. Данная задача является несбалансированной, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 113 \geq \sum_{j=1}^{n} b_j = 100,$ ТЗ с избытком запасов.

Введем дополнительный фиктивный пункт назначения $B_{ф}$ со значением в нем потребности $b_{ф}= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 113 - 100 = 13.$ Присвоим перевозкам, связанными с этим пунктом нулевые тарифы. В результате получим сбалансированную ТЗ с исходной информацией:

ПО/ПП	В1	В2	В3	В4	$B_{ф}$	Запасы
А1	5	7	6	8	0	20
А2	6	7	8	5	0	25
А3	5	4	6	7	0	30
А4	6	5	7	4	0	15
А5	5	6	6	6	0	23
Заявки	15	35	35	15	13	

Решив эту задачу, получим решение исходной задачи, отбрасывая в плане перевозок столбец, соответствующий Вф.

Планы перевозок, построенные методами северо-западного угла либо минимального элемента, рассматривают как приближенные решения ТЗ.

Точное решение, т.е. оптимальный план перевозок, определяется с помощью программного средства «Поиск решения».

Пример 10 (*транспортировка лесоматериалов*). Четыре леспромхоза заготавливают пиловочник в различных объемах, который поставляют на четыре лесопильных завода. Транспортные расходы в зависимости от того, из какого леспромхоза и на какой лесопильный завод будут перевозить пиловочник, различные:

Леспромхоз	Лесозаводы				Объемы заготовок пиловочника, тыс. $м^3$
	1-й	2-й	3-й	4-й	
1-й	2	3	5	2	200
2-й	4	2	1	3	350
3-й	3	4	3	5	400
4-й	1	2	2	4	550
Потребность, тыс. $м^3$	300	400	300	400	1400 \ 1500

Здесь транспортные расходы по перевозке 1 $м^3$ пиловочника от 1-го леспромхоза до 1-го лесозавода равны 2 у.е., от 1-го леспромхоза до 2-го лесозавода равны 3 у.е. и т.д.

Требуется составить план перевозок пиловочника, чтобы потребность лесозаводов была удовлетворена полностью при минимальных общих транспортных издержках.

Решение. Содержательная постановка данной задачи сводится к математической модели транспортной задачи линейного программирования по критерию минимальной стоимости общих транспортных затрат. Анализируя исходную информацию, можно отметить, что ресурсы превышают потребность на 100 $м^3$. Для сбалансированности ресурсов и потребностей вводится дополнительный фиктивный потребитель (столбец) с объемом разницы 100 $м^3$. Показатели удельных транспортных расходов по фиктивному потребителю принимаются нулевые.

Леспромхоз	Лесозаводы					
	1-й	2-й	3-й	4-й	Вф	Запасы
1-й	2	3	5	2	0	200
2-й	4	2	1	3	0	350
3-й	3	4	3	5	0	400
4-й	1	2	2	4	0	550
Потребности	300	400	300	400	100	

Общие транспортные затраты для плана перевозок определенного методом минимального элемента равны **3300 у.е.**

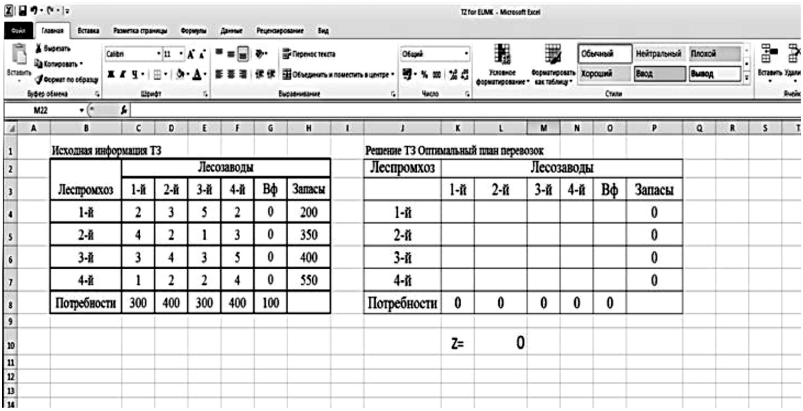
Для того чтобы определить оптимальное решение этой ТЗ запишем ее ЭММ. Обозначим через переменную x_{ij} – объем перевозок от i-го леспромхоза до j-го лесозавода. Тогда модель имеет вид:

$$min\{z = 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 3x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34} + x_{41} + 2x_{42} + 2x_{43} + 4x_{44}\}$$

при условиях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 350$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 400$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 550$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 300$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 400$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 300$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 400$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 100$$
$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, 4 ; j = 1, 2, \dots, 5.$$

На рабочий лист Excel внесем исходную информацию ТЗ и ее ЭММ (см. рис. 15).



Исходная информация ТЗ

Леспромхоз	Лесозаводы 1-й	2-й	3-й	4-й	Вф	Запасы
1-й	2	3	5	2	0	200
2-й	4	2	1	3	0	350
3-й	3	4	3	5	0	400
4-й	1	2	2	4	0	550
Потребности	300	400	300	400	100	

Решение ТЗ Оптимальный план перевозок

Леспромхоз	Лесозаводы 1-й	2-й	3-й	4-й	Вф	Запасы
1-й						0
2-й						0
3-й						0
4-й						0
Потребности	0	0	0	0	0	

Z= 0

Рисунок 15. Исходная информация и модель ТЗ

В клетках P4 – P7 находятся левые части первых четырех условий ТЗ, клетках K8 – O8 находятся левые части следующих пяти условий ТЗ, а в клетке L10 – выражение целевой функции.

После активизации программного средства получаем следующий вид рабочего листа *Excel* (рис. 16). Заполнение диалогового окна «Поиск решения» согласно определенным требованиям и нажатие кнопки

«Найти решение» приводит к построению оптимального плана перевозок, величина общих затрат равна 3000 у.е. (рис. 17).

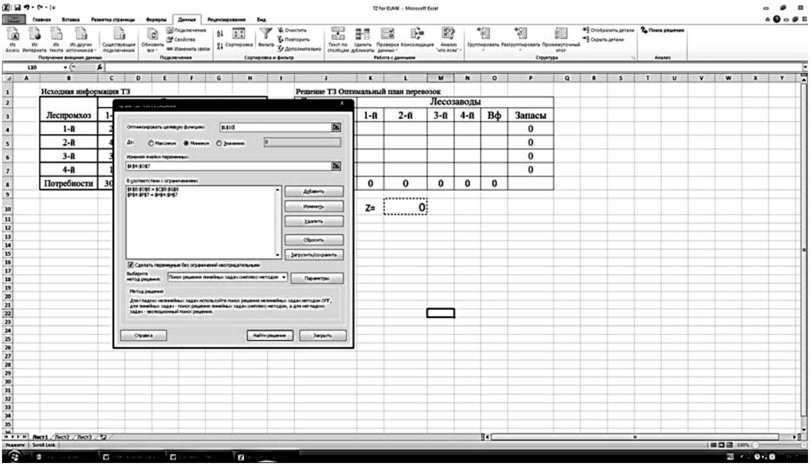


Рисунок 16. Окно надстройки «Поиск решения» для примера 10

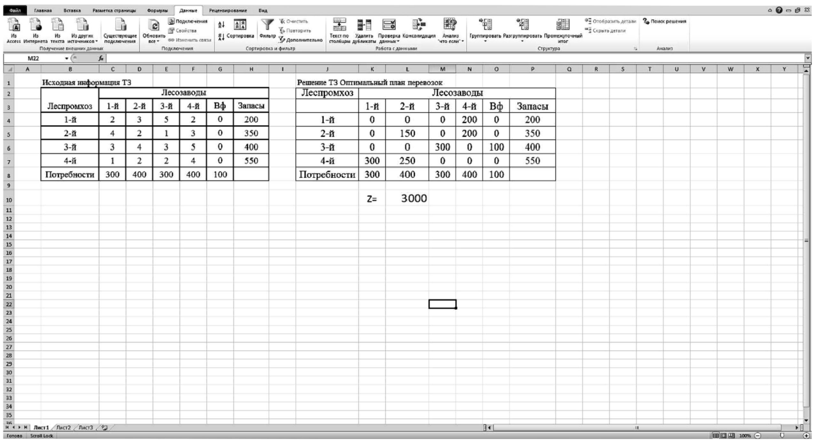


Рисунок 17. Оптимальное решение ТЗ

5. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ, СВОДЯЩИЕСЯ К МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

5.1. Транспортная задача по критерию времени

На практике возникают ситуации, когда в качестве критерия оптимальности в условиях перевозок необходимо использовать время Т, в течение которого все перевозки будут закончены. Например, при перевозке скоропортящихся продуктов зачастую важна не ее стоимость, а продолжительность. В этих условиях транспортная задача называется ТЗ по критерию времени.

В транспортной задаче по критерию времени наилучшим планом перевозок $\{x_{ij}\}$ признается план, продолжительность перевозок Т которого минимальна: $T - min$.

Сформулируем ТЗ по критерию времени. Заданы m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, где сосредоточены запасы некоторого груза в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц соответственно, и n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, куда необходимо перевезти $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц указанного груза. Заданы также время транспортировки груза из любого пункта отправления A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ до любого пункта назначения B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ равное t_{ij}. Необходимо за минимальное время Т организовать перевозки груза так, чтобы из каждого пункта отправления весь запас груза был вывезен и в каждый пункт назначения весь груз в соответствии с заявкой был завезен. Рассмотрим пример.

Пример 11 (*транспортировка грузов по критерию времени*). Требуется минимизировать общее время на перевозку всех товаров от предприятий-производителей (Республика Беларусь, Россия, Украина) на торговые склады (Казань, Рига, Воронеж, Курск, Москва). При этом необходимо учесть возможности поставок каждого из производителей (Республика Беларусь – 415 поставок, Россия – 512 поставок, Украина – 180 поставок) при максимальном удовлетворении запросов в поставках потребителей (Казань – 240, Рига – 115, Воронеж – 420, Курск – 112, Москва – 220). Время (в днях) на поставку товаров по конкретной коммуникации приведено в следующей таблице:

Таблица 6

Время в днях поставки товаров

	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва
Республика Беларусь	23	12	20	18	16
Россия (Урал)	14	22	21	25	20
Украина	22	31	16	10	19

Решение. Покажем, что существуют планы перевозок с различным временем доставки всех грузов. Методом северо-западного угла построим план перевозок, для которого время доставки всех грузов равно 25 дней.

	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва	Запасы
Республика Беларусь	240	115	60			**415**
Россия (Урал)			360	112	40	**512**
Украина					180	**180**
Потребности	**240**	**115**	**420**	**112**	**220**	

Методом северо-восточного угла построим план перевозок, для которого время доставки всех грузов равно 22 дня.

	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва	Запасы
Республика Беларусь			83	112	220	**415**
Россия (Урал)	60	115	337			**512**
Украина	180					**180**
Потребности	**240**	**115**	**420**	**112**	**220**	

Математическая модель сбалансированной ТЗ по критерию времени можно определить следующим образом:

$$\boldsymbol{min}_{\text{по всем планам перевозок}}\left\{\mathrm{T} = \boldsymbol{max}_{x_{ij}>0}\boldsymbol{t_{ij}}\right\}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; i = 1,2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; j = 1,2, \dots, n; \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2, \dots, j = 1,2, \dots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

ТЗ по критерию времени не является задачей линейного программирования, так как целевая функция (1) не является линейной функцией переменных $\{x_{ij}\}$.

Решение ТЗ по критерию времени может быть получено методом запрещенных клеток.

Для нашего примера ЭММ имеет вид

$$\boldsymbol{\min \{ T = \max \{t_{ij}\}, \text{для всех } x_{ij} > 0\}}$$

при условиях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 415,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 512,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 240,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 115,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 420,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 220.$$

Все неизвестные – неотрицательные числа.

Перейдем к определению оптимального решения. Найдем минимальные значения по строкам и столбцам матрицы времени поставки грузов по коммуникациям (i, j).

	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва	
Республика Беларусь	23	12	20	18	16	**12**
Россия (Урал)	14	22	21	25	20	**14**
Украина	22	31	16	10	19	**16**
	14	**12**	**16**	**10**	**16**	

Максимальное число среди найденных значений равно 16. Следовательно, не существует плана перевозок с поставкой всех грузов меньше чем за 16 дней. Оптимальный план перевозок требует времени поставки всех грузов между 16 и 22 днями.

Формируем вспомогательную таблицу коэффициентов целевой функции ТЗ по критерию стоимости, заменяя время поставки грузов, превышающее 16 дней, достаточно большим числом, например 100 000.

Решим вспомогательную ТЗ по критерию стоимости, в которой тарифы на перевозку грузов определяются элементами вспомогательной матрицы.

Матрица времени доставки грузов по коммуникациям	Казань	Рига	Воро-неж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	23	12	20	18	16		16
Россия (Урал)	14	22	21	25	20		
Украина	22	31	16	10	19		
Вспомогательная матрица	Казань	Рига	Воро-неж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	100 000	12	100 000	100 000	16		
Россия (Урал)	14	100 000	100 000	100 000	100 000		
Украина	100 000	100 000	16	10	100 000		
Решение ТЗ по критерию стоимости	Казань	Рига	Воро-неж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	0	115	80	0	220	415	415
Россия (Урал)	240	0	272	0	0	512	512
Украина	0	0	68	112	0	180	180
	240	115	420	112	220		
	240	115	420	112	220		
	Суммарная величина затрат 35 210 468						

Анализируя результаты решения, можно отметить, что не существует плана поставки всех грузов за 16 ед. времени, поскольку всегда будет задействована коммуникация с временем доставки грузов больше этого срока.

Пополним совокупность допустимых коммуникаций перевозок, включая сюда те, для которых время перевозок не превышает 20, и снова решим транспортную задачу по критерию стоимости.

Время доставки грузов по коммуникациям	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	**23**	**12**	**20**	**18**	**16**		**20**
Россия (Урал)	**14**	**22**	**21**	**25**	**20**		
Украина	**22**	**31**	**16**	**10**	**19**		
Вспомогательная матрица	**Казань**	**Рига**	**Воронеж**	**Курск**	**Москва**		
Республика Беларусь	**100 000**	**12**	**20**	**18**	**16**		
Россия (Урал)	**14**	**100 000**	**100 000**	**100 000**	**20**		
Украина	**100 000**	**100 000**	**16**	**10**	**19**		
Решение ТЗ по критерию стоимости	**Казань**	**Рига**	**Воронеж**	**Курск**	**Москва**		
Республика Беларусь	**0**	**115**	**80**	**0**	**220**	**415**	**415**
Россия (Урал)	**240**	**0**	**272**	**0**	**0**	**512**	**512**
Украина	**0**	**0**	**68**	**112**	**0**	**180**	**180**
	240	**115**	**420**	**112**	**220**		
	240	**115**	**420**	**112**	**220**		
	Суммарная величина затрат 27 212 068						

Результаты решения показывают, что не существует плана поставки всех грузов за 20 ед. времени, поскольку перевозка из одного региона России (Урал) в другой (Воронеж) проходит через запрещенную коммуникацию (соответствующий элемент вспомогательной матрицы равен 100 000).

Снова пополним совокупность допустимых коммуникаций включая сюда те, для которых время перевозок не превышает 21, а затем решим транспортную задачу по критерию стоимости.

Время доставки грузов по коммуникациям	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	23	12	20	18	16		21
Россия (Урал)	14	22	21	25	20		
Украина	22	31	16	10	19		

Вспомогательная матрица	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	100 000	12	20	18	16		
Россия (Урал)	14	100 000	21	100 000	20		
Украина	100 000	100 000	16	10	19		
Решение ТЗ по критерию стоимости	Казань	Рига	Воронеж	Курск	Москва		
Республика Беларусь	0	115	80	0	220	415	415
Россия (Урал)	240	0	272	0	0	512	512
Украина	0	0	68	112	0	180	180
	240	115	420	112	220		
	240	115	420	112	220		
	Суммарная величина затрат 17 780						

Данное решение определяет оптимальный план перевозки всех грузов за 21 ед. времени. Все перевозки проходят по незапрещенным коммуникациям.

	Казань	**Рига**	**Воронеж**	**Курск**	**Москва**
Республика Беларусь	0	115	80	0	220
Россия (Урал)	240	0	272	0	0
Украина	0	0	68	112	0

5.2. Задача о назначениях

Рассмотрим содержательную задачу. Для выполнения работ необходимо назначить m исполнителей A_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ по n станкам B_j, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, или назначить m различных работ A_i по n коллективам B_j, или рабочие бригады A_i по рейсам B_j и т.п., при условии, что каждый исполнитель A_i работает на одном станке B_j, или каждый коллектив A_i исполняет один вид работы B_j, или каждая бригада A_i перевозится одним рейсом B_j. Стоимость назначения определяется матрицей $\{\ c_{ij}\}$. Требуется так провести назначения – A_i по – B_j, чтобы суммарная стоимость назначения была ***минимальна.***

Сформулированную таким образом задачу о назначениях можно записать как транспортную задачу, в которой роли исполнителей (работ, бригад и т.п.) играют пункты отправления A_i, а работы B_j (станки, коллективы, рейсы и т.п.) – пункты назначения B_j. Поскольку каждый исполнитель должен работать только на одной работе и каждая работа выполняется одним исполнителем, то запасы a_i и потребности b_j равны 1. Стоимости назначения $\{c_{ij}\}$ определяют тарифы перевозок.

Построим ЭММ задачи о назначениях. Определим переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i - \text{ый исполнитель выполняет работу } J, \\ 0, \text{если } i - \text{ый исполнитель не выполняет работу } J. \end{cases}$$

Тогда ЭММ имеет вид

$$\min\left\{z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}\right\}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \; i = 1,2,\dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \; j = 1,2,\dots, n;$$

$$x_{ij} \ge 0 - \text{целые числа } i = 1,2,\dots, j = 1,2,\dots, n.$$

Определенная модель – ТЗ, за исключением учета целочисленности переменных. Однако это ограничение можно опустить, основываясь на свойстве матрицы коэффициентов ограничений.

Если число исполнителей $m = n$, ТЗ является сбалансированной (закрытой), в противном случае – несбалансированной (открытой) и прежде чем ее решать, необходимо сбалансировать, по правилу описанному ранее для ТЗ.

Рассмотрим пример.

Пример 12 (*распределение работников по работам*). Распределить пятерых работников между пятью работами, если затраты, обусловленные выполнением работ, приведены в таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	5	7	4	6
A_2	6	7	5	6	7
A_3	6	5	6	5	6
A_4	5	6	7	6	7
A_5	7	5	6	5	6

Решение. Применяем надстройку *Excel* **Поиск решения** (рис. 18), определим решение задачи о назначениях.

Рисунок 18. Оптимальное решение задачи о назначениях

Таким образом, имеем оптимальное назначение: A_1 выполняет работу B_4 $(x_{14} = 1)$, A_2 выполняет работу B_3 $(x_{23} = 1)$, $A_3 - B_5$ $(x_{35} = 1)$, $A_4 - B_1$ $(x_{41} = 1)$, $A_5 - B_2$ $(x_{52} = 1)$. Минимальные затраты равны

$$z = 4 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25.$$

Отметим, что если в задаче о назначениях какой-либо исполнитель i не может выполнять какую-то работу j, то соответствующая стоимость c_{ij} считается очень большой, например 1000.

Существует другая формулировка задачи о назначениях: распределить рабочих по работам или расставить датчики по объектам так, чтобы суммарная стоимость выполненных работ или информация об объектах была **максимальна**. Отличие в этом случае состоит только в том, что целевую функцию максимизируют. Это должно быть указано в надстройке **Поиск решения.**

5.3. Задача о кратчайшем пути

Данная задача определяет перевозку грузов между двумя пунктами по кратчайшему маршруту, используя существующую сеть дорог. Эта задача может рассматриваться как **ТЗ** или **задача о назначениях**.

Рассмотрим ТЗ с пунктом отправления А, пунктом назначения В и транзитными пунктами $T_l, l = 1, 2, \dots, k$, являющимися узлами сети (рис. 19) для $k = 10$.

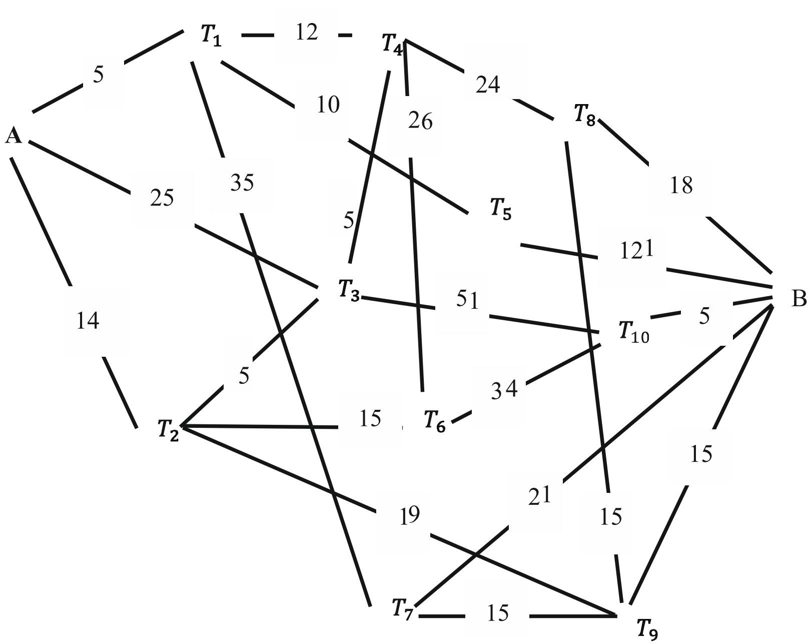


Рисунок 19. Сеть дорог для перевозки грузов

В такой ТЗ пунктам отправления и назначения определяется единичные запас и потребность соответственно, а транзитным пунктам одновременно и запас, и потребность, равные единице. Расстояния между пунктами играет роль стоимости перевозок единицы груза между ними. Расстояние от любого пункта до него самого считается равным нулю. Если между некоторыми пунктами перевозки невозможны, они не соединены ребрами (коммуникациями), то расстоянию присваивается очень большое число, например 1000.

Построим ЭММ задачи о кратчайшем пути. Определим переменные.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если осуществляется перевозка между пунктами } i \text{ и } j, \\ 0, \text{если перевозки между пунктами } i \text{ и } j \text{ нет.} \end{cases}$$

Тогда ЭММ имеет вид

$$min\left\{z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}\right\}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{k+1} x_{ij} = 1 \; i = 1,2,\dots,\, k+1;$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_{ij} = 1 \; j = 1,2,\dots,\, k+1;$$

$$x_{ij} \geq 0 - \text{целые числа } i,j = 1,2,\dots,\, k+1.$$

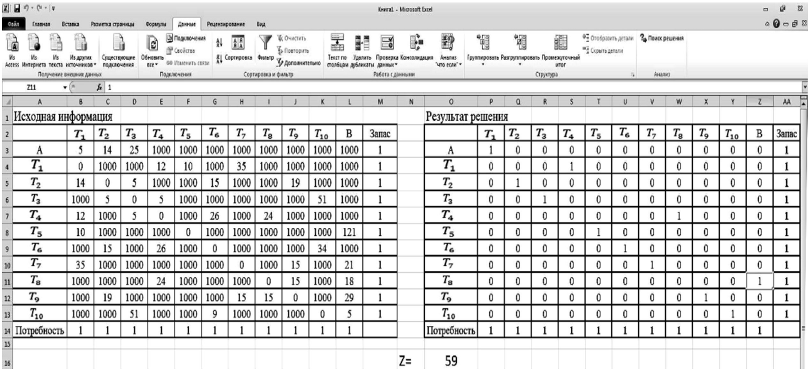
Построенная здесь ЭММ – ТЗ, за исключением целочисленности переменных. Это ограничение можно опустить, основываясь на свойстве матрицы коэффициентов ограничений.

Пример 13 (*определение кратчайшего пути между двумя пунктами в сети*). Определить кратчайший путь между пунктами А и В для сети рисунка 19.

Решение. Исходную информацию задачи для сети, показанной на рисунке, можно представить в виде следующей таблицы:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	В	Запас
А	5	14	25	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1
T_1	0	1000	1000	12	10	1000	35	1000	1000	1000	1000	1
T_2	14	0	5	1000	1000	15	1000	1000	19	1000	1000	1
T_3	1000	5	0	5	1000	1000	1000	1000	1000	51	1000	1
T_4	12	1000	5	0	1000	26	1000	24	1000	1000	1000	1
T_5	10	1000	1000	1000	0	1000	1000	1000	1000	1000	121	1
T_6	1000	15	1000	26	1000	0	1000	1000	1000	34	1000	1
T_7	35	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	15	1000	21	1
T_8	1000	1000	1000	24	1000	1000	1000	0	15	1000	18	1
T_9	1000	19	1000	1000	1000	1000	15	15	0	1000	29	1
T_{10}	1000	1000	51	1000	1000	9	1000	1000	1000	0	5	1
Потребность	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Данную информацию представим на рабочем листе *Excel* и применим надстройку «Поиск решения», получим результат, отраженный на рис. 20.



Исходная информация

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	B	Запас
A	5	14	25	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1
T_1	0	1000	1000	12	10	1000	35	1000	1000	1000	1000	1
T_2	14	0	5	1000	1000	15	1000	1000	19	1000	1000	1
T_3	1000	5	0	5	1000	1000	1000	1000	1000	51	1000	1
T_4	12	1000	5	0	1000	26	1000	24	1000	1000	1000	1
T_5	10	1000	1000	1000	0	1000	1000	1000	1000	1000	121	1
T_6	1000	15	1000	26	1000	0	1000	1000	1000	34	1000	1
T_7	35	1000	1000	1000	1000	1000	0	1000	15	1000	21	1
T_8	1000	1000	1000	24	1000	1000	1000	0	15	1000	18	1
T_9	1000	19	1000	1000	1000	1000	15	15	0	1000	29	1
T_{10}	1000	1000	51	1000	1000	9	1000	1000	1000	0	5	1
Потребность	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Результат решения

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	B	Запас
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
T_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
T_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
T_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
T_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
T_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
T_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
T_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Потребность	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Z= 59

Рисунок 20. Результаты решения

Отсюда следует, что кратчайший путь проходит через пункты А – T_1 – T_4 – T_8 – В и его длина равна 59.

6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.1. Развитие и сущность метода

Для определения решений некоторых типов оптимизационных моделей может быть применено динамическое программирование. Термин «динамическое программирование» относится скорее к вычислительному методу, чем к особому типу оптимизационных моделей.

Динамическое программирование разработано в начале 1950-х гг. в значительной степени благодаря работам американского ученого Ричарда Беллмана и его сотрудников при изучении моделей, в которых учитывались изменения во времени. Возникновение его связано с исследованием некоторых типов многошаговых процессов управления, возникающих в теории создания запасов. В дальнейшем аппарат динамического программирования был значительно усовершенствован и развит для решения задач, не связанных с временными изменениями.

Идея метода динамического программирования состоит в том, что отыскание максимума (или минимума) функции многих переменных заменяется многократным отысканием максимума (минимума) функции одного или небольшого числа переменных.

Сущность метода динамического программирования сводится к составлению функциональных уравнений, управляющих процессом, и дальнейшему решению этих уравнений посредством нестандартных вычислительных процедур.

Функциональным называется такое уравнение, которое выражает функциональную связь между множеством функций. Составление функциональных уравнений проводится на основе *принципа оптимальности* Р. Беллмана*,* сущность которого заключается в следующем:

Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Указанный принцип можно легко проверить доказательством от противного. Математическая перефразировка этого принципа в некоторых реальных задачах логистики приводит к *рекуррентным* функциональным уравнениям.

Задачи, которые могут быть отнесены к моделям динамического программирования, должны обладать тремя основными свойствами:

1) задача может рассматриваться как n-шаговый процесс принятия решения, природа задачи не меняется с изменением числа шагов;
2) оптимальное решение зависит не от предыстории, не от того, как процесс достиг исходного состояния, а только от состояния процесса в исходный момент времени;
3) оптимальное решение *аддитивно*, т.е. получается путем сложения результатов по этапам (шагам) решения.

6.2. Задача распределения ресурсов

Изложим сущность вычислительного метода *динамического программирования* на примере задачи распределения ресурсов.

Пример 14 (*распределение ресурсов по предприятиям*). Пусть имеется заданное исходное количеств средств (ресурсов) $R_0 = 5$ усл. ед., которое мы должны распределить между тремя промышленными предприятиями П1, П2 и П3 на очередной год. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 усл. ед. Средства x, вложенные в i-е предприятие ($i = 1, 2, 3$), приносят в конце года прибыль $f_i(x)$, зависящую от количества средств. Функции $f_i(x)$ заданы таблично:

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	0	1	2	4	7
$f_3(x)$	0	2	2	3	3	3

Принято считать, что:

а) прибыль $f_i(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;
б) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;
в) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

Решение. Обозначим через x_i количество ресурсов, выделяемых i-му предприятию, $i = 1, 2, 3$. Тогда ЭММ сформулированной задачи распределения ресурсов примет вид

$$max\{f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)\}$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = R_0 = 5,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Это оптимизационная нелинейная модель, целевая функция нелинейная, задана таблично. Однако основное ограничение и целевая функция являются сепарабельными, т.е. представлены в виде суммы функций одной переменной. Для определения решения таких моделей можно применить метод динамического программирования.

Первый этап метода – *инвариантное погружение* исходной задачи в совокупность аналогичных задач. Реализация этого этапа в каждом конкретном случае различна, требует творческого подхода и определенного опыта. Для данной модели он состоит в рассмотрении совокупности задач распределения ресурсов с произвольным числом k предприятий от 1 до 3 и произвольным количеством y ресурсов от 1 до 5, т.е. совокупность состоит из 15 задач.

$$max \sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i), \sum_{i=1}^{k} x_i = y, x_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

При $k = 3, y = R_0 = 5$ из совокупности задач получается исходная задача.

Обозначим через $B_k(y)$ оптимальное значение целевой функции произвольной задачи из определенной совокупности (функция Беллмана).

$$B_k(y) = max \sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i), \sum_{i=1}^{k} x_i = y, x_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

Второй этап решения задачи методом динамического программирования состоит в получении уравнения для функции Беллмана. Здесь используется сформулированный принцип оптимальности и инвариантное погружение, описанное на первом этапе. Процесс решения распределения ресурсов $R_0 = 5$ можно рассматривать как трехшаговый, номер шага совпадает с номером предприятия и определением переменных x_1, x_2, x_3. В задаче совокупности с шагами k и запасом ресурсов y выделим на k-м шаге ресурс в количестве $z, 0 \leq z \leq y$, размер прибыли будет равен $f_k(z)$. На предыдущих шагах с номерами $1, 2, \dots, k-1$ останется ресурсов в количестве $y - z$. Предполагаем, что ресурсы на предыдущих шагах распределены оптимально, поэтому размер прибыли равен $B_{k-1}(y - z)$. Таким образом, при выделении на k-м шаге ресурса в количестве z от всего k шагового процесса и запаса ресурсов в количестве y получим прибыль

$$f_k(z) + B_{k-1}(y - z).$$

Изменяя количество z в пределах $0 \leq z \leq y$, находим значение $x_k^0(y)$, оптимальное количество ресурсов выделяемого k-му предприятию, при котором общая прибыль максимальна:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y}\{f_k(z) + B_{k-1}(y - z)\}.$$

С другой стороны максимальная прибыль k-шагового процесса распределения при количестве ресурсов y равна $B_k(y)$, поэтому в результате приходим к функциональному уравнению для функции Беллмана:

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y}\{f_k(z) + B_{k-1}(y - z)\}, k = 1, 2, 3.$$

Это рекуррентное уравнение, для его решения необходимо задать начальное условие. Последнее находим из определения функции Беллмана

$$B_1(y) = max_{0 \leq z \leq y}\{f_1(z)\} = f_1(y), x_1 = y.$$

Третий (и последний) этап метода динамического программирования состоит в поиске решения функционального уравнения, определения значений функции Беллмана.

$$B_2(y) = f_2(x_2^0(y)) + B_1(y - x_2^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y}\{f_2(z) + B_1(y - z)\}.$$

В этом выражении справа стоят заданная функция $f_2(z)$ и ранее найденные значения $B_1(y)$, поэтому значения $B_2(y)$ определяются максимизацией известной функции одной переменной. Например,

$$B_2(1) = \max\{f_2(0) + B_1(1);\ f_2(1) + B_1(0)\} = \max\{1; 0\} = 1, x_2 = 0.$$

$$B_2(2) = max\{f_2(0) + B_1(2);\ f_2(1) + B_1(1);\ f_2(2) + B_1(0)\} = \\ = max\{2; 1; 1\} = 2\,, x_2 = 0 \textit{ и т. д.}$$

Эти заключения справедливы и при определении значений функции

$$B_3(y) = f_3(x_3^0(y)) + B_2(y - x_3^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y}\{f_3(z) + B_2(y - z)\}.$$

Значения функций Беллмана для совокупности задач определим таблично

y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	1(0)	2(0)	3(0)	4(0;4)	7(5)
$B_3(y)$	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	7(0)

В клетках этой таблицы наряду со значением функции Беллмана $B_k(y)$ в скобках указано значение $x_k^0(y)$, на котором достигает максимума правая часть функционального уравнения.

Из таблицы видно, что максимальная прибыль в исходной задаче равна $B_3(5) = 7$. Поскольку здесь $x_3^0(5) = 0$, то предприятию П3 средства не выделяются, $x_3 = 0$, для предприятий П1 и П2 выделены 5 усл. ед. средств. Поскольку в клетке для $B_2(5)$ в скобках стоит число 5, то $x_2 = 5$, а значит $x_1 = 0$. Следовательно, для получения максимальной общей прибыли все средства (ресурсы) нужно выделить предприятию П2.

Предположим, что в исходной задаче $R_0 = 4$. Тогда оптимальное распределение средств по предприятиям согласно полученной таблице имеет вид: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 3$, общая прибыль равна 5.

Описывая динамическое программирование как метод решения оптимизационных задач, необходимо отметить и его слабые стороны. Так, в предложенной схеме решения задачи существенным образом используется тот факт, что система ограничений содержит только одно неравенство и, как следствие, ее состояние задается одним числом – нераспределенными средствами R_0. При наличии нескольких ограничений состояние управляемого процесса на каждом шаге характеризуется набором нескольких параметров и табулировать значения функций Беллмана необходимо для многократно большего количества точек. Последнее обстоятельство делает применение метода динамического программирования явно нерациональным или даже просто невозможным. Данную проблему его основоположник Р. Беллман назвал «проклятием многомерности». В настоящее время разработаны определенные пути преодоления указанных трудностей. Подробную информацию о них можно найти в специальной литературе.

6.3. Задача управления запасами

В реальных производственных условиях предприятиям выгодно изготовлять в течение некоторого периода времени продукцию в объеме, превышающем спрос в пределах этого периода, и хранить излишки продукции для удовлетворения последующего спроса. Вместе с тем хранение созданных запасов требует определенных затрат. Они обусловлены такими факторами, как арендная плата за складские помещения, страховые взносы, расходы по содержанию запасов продукции и др. Цель логистического управления предприятия в данном случае – разработать такую производственную программу, при которой общая сумма затрат на производство и хранение запасов была бы минимальной при условии своевременного удовлетворения спроса на продукцию.

Построим ЭММ этой содержательной задачи. Определим переменные модели:

x_n – объем выпуска продукции в течение промежутка времени n, некоторого планового периода; z_n, y_n – уровень запасов на начало и конец промежутка времени n; d_n – спрос на продукцию на промежутке времени n.

На значения переменных наложим несколько ограничений:

предполагается кратность объемов выпуска некоторой 1 усл. ед., т. е. $x_n = 0, 1, 2, \ldots$ для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$;

предприятию желателен нулевой уровень запасов $y_N = 0$ в конце n-го периода времени планового периода;

уровень запасов на конец периода времени складывается из уровня запасов на начало периода времени и объема выпуска продукции на этом периоде за вычетом объема реализации (спроса) на этом периоде, $y_n = z_n + x_n - d_n$.

Предполагается, что для каждого периода времени n затраты зависят от выпуска продукции x_n и уровня запасов y_n на конец периода. Затраты на промежутке времени обозначим $c(x_n, y_n)$.

Состояние системы в начале любого периода определяет уровень запасов z_n. Для принятия решения об объеме выпуска нет необходимости знать, как достигнут этот уровень запасов.

Обозначим через $B_n(z_n)$ значение затрат, соответствующих оптимальной стратегии в течение последних n промежутков времени планового периода и назовем его функцией Беллмана.

Число шагов при решении данной задачи определяется числом планируемых промежутков времени, которые нумеруются в порядке, противоположном естественному ходу процесса, т. е. вычисления строятся от конечного состояния к исходному. Конечным состоянием будет начало последнего промежутка времени планового периода, а исходным – начальный момент первого промежутка времени. Составим функциональные уравнения, описывающие поиск решения задачи:

$$B_n(z_n) = min\{\, c(x_n, z_n + x_n - d_n) + B_{n-1}(z_n + x_n - d_n)\},$$
$$n = 1, 2, \ldots, N,$$

Здесь минимум определяется по переменной x_n, значение которой ограничены возможностями производства и хранения продукции.

Начальный уровень запасов z_n рассматривается как переменная величина, полностью характеризующая состояние системы.

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий решение задачи управления запасами.

Пример 15 (*управление производством и запасами мебели*). Спрос на продукцию мебельной фабрики составляет три партии в квартал. Затраты фабрики складываются из затрат на производство и стоимости содержания запасов. Производственные затраты: сумма условно-постоянных затрат – 13 у.е./квартал и условно-переменных затрат – 3 у.е. на каждую партию мебели. Стоимость содержания запасов является линейной функцией от объема запасов y партий мебели, $g(y) = 2y$. Мебельная фабрика не может производить более пяти партий мебели в квартал и максимальный объем хранения продукции на складе – четыре партии мебели. Определить стратегию выпуска продукции и управления запасами фабрики на год, которая минимизирует общую сумму затрат.

Решение. Учитывая исходные данные примера, определим выражение функции затрат на промежутке времени:

$$c(x_n, y_n) = 13 + 3 \cdot x_n + 2 \cdot y_n.$$

Используя это выражение и данные о спросе на продукцию, возможности хранения запишем функциональные уравнения для функции Беллмана:

$$B_n(z_n) = min\{\, 13 + 3 \cdot x_n + 2 \cdot (z_n + x_n - 3) + B_{n-1}(z_n + x_n - 3)\},$$
$$n = 1, 2, 3, 4;\ z_n = 0, 1, 2, 3, 4;\ 3 - z_n \le x_n \le min(5, 7 - z_n).$$

Отметим, что ограниченность производственных мощностей не позволяет превысить 5 партий мебели в квартал, а ограниченность управления запасами не позволяет превысить $(7 - z_n)$.

Начнем рассматривать многошаговый процесс метода динамического программирования с последнего квартала года, обозначив его как шаг 1.

Шаг 1. Определим значения функции Беллмана $B_1(z_1)$. Поскольку на конец IV квартала предприятие не имеет запасов продукции, а спрос в каждом квартале равен 3, то запасы на начало этого квартала могут принимать значения $z_1 = 0, 1, 2, 3$. Если $z_1 = 0$, то предприятие должно произвести $x_1 = 3$ комплекта мебели и понести затраты $B_1(0) = 13 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 22$ у.е.

Если $z_1 = 1$, то соответственно $x_1 = 2$ и $B_1(1) = 13 + 3 \cdot 2 +$ $+ 2 \cdot 0 = 19$ у.е. При $z_1 = 2$ имеем $x_1 = 1$ и $B_1(2) = 13 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 =$ $= 16$ у.е. Наконец, если $z_1 = 3$ имеем $x_1 = 0$ и $B_1(3) = 13 + 3 \cdot 0 +$ $+ 2 \cdot 0 = 13$ у.е. В результате приходим к таблице значений функции $B_1(z_1)$.

Значения функции $B_1(z_1)$

z_1 \ x_1	0	1	2	3
0				22
1			19	
2		16		
3	13			

В этой таблице клетки, соответствующие недопустимым сочетаниям z_1, x_1 не заполнены.

Шаг 2. Определим значения функции Беллмана $B_2(z_2)$ для III и IV кварталов в следующей таблице.

Определение значений функции $B_2(z_2)$

z_2 \ x_2		1	2	3	4	5	x_2	$B_2(z_2)$
0				44	46	48	3	44
1			41	43	45	34	5	34
2		38	40	42	31		4	31
3	22	37	39	28			0	22
4	21	36	25				0	21

Каждое из указанных в этой таблице чисел представляет собой сумму затрат для III квартала и оптимальных затрат для всех последующих кварталов. Клетки, соответствующие недопустимым сочетаниям z_2, x_2, не заполнены. Например, если $z_2 = 0$, то для обеспечения спроса $3 \le x_2 \le 5$. Для клеток, участвующих в расчетах, пользуемся следующей формулой:

$$c(x_n, y_n) + B_{n-1}(z_2 + x_2 - 3).$$

Например, $z_2 = 0,\ x_2 = 3,$ получаем

$$c(x_2, y_2) + B_1(z_2 + x_2 - 3) =$$
$$= 13 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot (z_2 + x_2 - 3) + B_1(z_2 + x_2 - 3) =$$
$$=13 + 9 + 0 + 22 = 44.$$

Аналогично рассчитываются значения в других клетках таблицы.

Для каждого фиксированного значения z_2 столбец $B_2(z_2)$ представляет собой минимальную величину из всех значений суммарных затрат в клетках данной строки, а столбец x_2 – соответствующий объем производства мебели в партиях за III квартал.

Шаг 3. Определим сумму затрат для II квартала и оптимальных затрат для всех последующих кварталов, а также значение $B_3(z_3)$ и соответствующий ему объем производства x_3. Результаты представим в следующей таблице.

Определение значений функции $B_3(z_3)$

z_3 \ x_3		1	2	3	4	5	x_3	$B_3(z_3)$
0				66	61	63	4	61
1			63	58	60	56	5	56
2		60	55	57	53	57	4	53
3	44	52	54	50	54		0	44
4	36	51	47	51			0	36

В этой таблице в расчетах не участвуют некоторые сочетания $z_3, x_3,$ поскольку не выполняются неравенства $3 - z_n \leq x_n \leq \min(5, 7 - z_n)$. Величины суммарных затрат в допустимых клетках получены на основании формулы

$$13 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot (z_3 + x_3 - 3) + B_2(z_3 + x_3 - 3).$$

Например, $z_3 = 3, x_2 = 3,$ получаем

$$13 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (3 + 3 - 3) + B_2(3 + 3 - 3) = 13 + 9 + 6 + 22 = 50.$$

Шаг 4. Аналогично предыдущим шагам рассчитываются значения $B_4(z_4)$ для I квартала планируемого года.

Определение значений функции $B_4(z_4)$

z_4 \ x_4		1	2	3	4	5	x_4	$B_4(z_4)$
0				83	83	85	4; 5	83
1			80	80	82	78	5	78
2		77	77	79	75	72	5	72
3	61	74	76	72	69		0	61
4	58	73	69	66			0	58

Теперь можно анализировать деятельность предприятия. Допустим, на начало года на складе осталось три партии мебели. Согласно оптимальной стратегии минимальные затраты на производство и хранение продукции в течение года равны $B_4(3)$ =61 у.е. В I квартале нет необходимости производить мебель ($x_4 = 0$). При объеме реализации в I квартале трех партий мебели остатки на складе на начало II квартала $z_3 = 0$. Из таблицы шага 3 следует, что во II квартале необходимо произвести четыре партии мебели. Остатки на складе в начале III квартала $z_2 = 1$ на основании таблицы шага 2 получаем, что в III квартале мебельная фабрика должна произвести пять партий мебели. Остатки на складе в начале IV квартала составят $z_1 = 2$, отсюда на основе таблицы шага 1 имеем производство IV квартала в объеме $x_1 = 1$.

6.4. Задача о загрузке транспортного средства *(задача о рюкзаке или ранце).* Общая постановка задачи формулируется следующим образом:

Транспортное средство загружается предметами $\boldsymbol{n}$ различных типов. Каждый предмет типа $\boldsymbol{i}$ имеет вес m_i и стоимость p_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Максимальная грузоподъемность транспортного средства равна M. Требуется найти такой вариант загрузки, при котором стоимость перевозимого груза была бы максимальной.

Для того чтобы составить ЭММ задачи обозначим через x_i – количество предметов типа i, помещенных в транспортное средство. Тогда ЭММ имеет вид

$$max\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right\},$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i \le M, x_i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение модели проведем методом динамического программирования.

Шаг $\boldsymbol{i}$ метода ставится в соответствие предмету типа $\boldsymbol{i}, i = 1, 2, \dots, n$. Пусть y_i – суммарный вес предметов, решения о погрузке которых в транспортное средство приняты на шагах $i, i + 1, i + 2, \dots, n$, при этом $y_1 = M, y_i = 0, 1, 2, \dots, M$ при $i = 2, 3, \dots, n$. Пусть $B_i(y_i)$ – максимальная суммарная стоимость предметов, решения о погрузке которых приняты на шагах $i, i+1, i+2, \ldots, n$ при заданном y_i. Тогда функциональные уравнения для определения значений функций Беллмана и решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи имеют вид

$$B_n(y_n) = \max_{x_n=0,1,\ldots,[y_{n/m_n}]} \{p_n \cdot x_n\},$$

$$B_i(y_i) = \max_{x_i=0,1,\ldots,[y_{i/m_i}]} \{p_i \cdot x_i + B_{i+1}(y_i - m_i \cdot x_i)\}, i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Здесь [a] обозначает целую часть числа а.

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий решение задачи о загрузке транспортного средства.

Пример 16 *(загрузка транспортного средства).* Транспортное средство грузоподъемностью $M = 50$ т, загружается предметами трех типов T_1, T_2, T_3, масса и стоимость которых представлены в таблице

	$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{T_3}$
Масса предмета, т	11	17	23
Стоимость предмета, у.е.	20	36	48

Найти такой вариант загрузки, при котором стоимость перевозимых грузов максимальна.

Решение. В нашем случае функциональные уравнения для определения значений функций Беллмана имеют вид

$$B_3(y_3) = \max_{x_3=0,1,\ldots,[y_{3/23}]} \{48 \cdot x_3\}, y_3 = 0, 1, \ldots, 50,$$

$$B_2(y_2) = \max_{x_2=0,1,\ldots,[y_{2/17}]} \{36 \cdot x_2 + B_3(y_2 - 17 \cdot x_2)\}, y_2 = 0, 1, \ldots, 50,$$

$$B_1(y_1) = \max_{x_1=0,1,\ldots,[y_{1/11}]} \{20 \cdot x_1 + B_2(y_1 - 11 \cdot x_1)\}, y_1 = 50.$$

Значения функций Беллмана представим в виде следующих таблиц:

y_3	0 ÷ 22	23 ÷ 45	46÷ 50
$B_3(y_3)$	0 (0)	48 (1)	96 (2)

y_2	0 ÷ 16	17 ÷ 22	23 ÷ 33	34 ÷ 39	40 ÷ 45	46 ÷ 50
$B_2(y_2)$	0 (0)	36 (1)	48 (0)	72 (2)	84 (1)	96 (0)

y_1	50
$B_1(y_1)$	96 (0; 3)

В клетках этой таблицы наряду со значением функции Беллмана $B_i(y_i)$, $i = 1, 2, 3$, в скобках указано значение $x_i(y_i)$, на котором достигает максимума правая часть функционального уравнения.

Из последней таблицы видно, что максимальная стоимость перевозимого груза равна $B_1(50) = 96$, в скобках клетки стоят два числа 0 и 3. Это показывает, что можно определить два варианта оптимальной загрузки транспортного средства:

1) $x_1 = 0$, $x_2 = 0, x_3 = 2$, суммарная масса груза равна $2 \cdot 23 = 46$;

2) $x_1 = 3$, $x_2 = 1, x_3 = 0$, суммарная масса груза равна $3 \cdot 11 + 1 \cdot 17 = 50$.

7. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

7.1. История развития и общая характеристика

Методы сетевого планирования и управления (СПУ) разработаны учеными в конце 1950-х годов в США. Эти методы создавались для составления планов-графиков выполнения крупных комплексов работ по модернизации заводов фирмы «Дюпон». Параллельно и независимо в военно-морских силах США была создана методика анализа и оценки проектов PERT (*Program Evaluation and Review Technique*). Она была создана для реализации проекта разработки ракетной системы «Поларис», объединяющего около 3800 основных подрядчиков и состоящего из 60 тыс. операций. Крупные промышленные корпорации начали применять эти методы практически одновременно с военными для разработки новых видов продукции и модернизации производства. Широкое применение они получили в строительстве.

По существу, значительный выигрыш по времени выполнения комплекса работ образуется в результате применения математических методов в планировании и управлении сложными комплексами работ. Эти методы требуют проведения множества альтернативных расчетов на ЭВМ. Но поскольку в начале ЭВМ были дороги и доступны только крупным организациям, то исторически первые проекты, для которых использовалось СПУ, представляли из себя грандиозные по масштабам комплексы работ. Для их выполнения требовалось большое число исполнителей и грандиозные капиталовложения.

Этап наиболее бурного развития систем для управления проектами начался с появлением персональных компьютеров. Компьютер стал рабочим инструментом для широкого круга руководителей. Значительное расширение круга пользователей СПУ породило потребность создания программных средств, для управления проектами, одним из важнейших показателей которых является простота использования.

Методы СПУ используются, прежде всего, для расчета календарных планов и их оптимизации по различным критериям. Основным элементом СПУ является сетевая модель, которая моделирует процесс выполнения комплекса работ для достижения определенной цели. Графическое изображение сетевой модели называется сетевым графиком. Сетевая модель может быть представлена в табличной, матричной форме, а также в форме диаграммы на шкале времени (диаграмма Ганта). Преимущество использования сетевых графиков, временных диаграмм перед табличной и матричной формой представления заключается в их наглядности. Однако это преимущество исчезает прямо пропорционально тому, как увеличиваются размеры сетевой модели. Для реальных задач сетевого моделирования, в которых речь идет о тысячах работ, событий, вычерчивание сетевых графиков и диаграмм теряет всякий смысл.

Преимущество табличной и матричной формы перед графическими представлениями состоит в том, что с их помощью удобно осуществлять анализ параметров сетевых моделей. В этих формах применимы алгоритмические процедуры анализа, выполнение которых не требует наглядного отображения модели на плоскости. Переход от одной формы представления сетевой модели к другой не составляет большого труда и затрат времени с помощью современных компьютеров.

Применение методов СПУ состоит из трех основных этапов: 1) структурное планирование; 2) календарное планирование; 3) оперативное управление.

1. Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции (работы), для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевая модель (график), который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

2. Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

3. В ходе оперативного управления используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

7.2. Структурное планирование в СПУ

Для структурного планирования основными понятиями являются *работы* и *события.*

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата и требующий затрат каких-либо ресурсов, имеет протяженность во времени.

По своей физической природе работы можно рассматривать как:

1) действие (заливка фундамента бетоном, составление заявки на материалы, изучение конъюнктуры рынка);
2) процесс (старение товаров, выдерживание вина, травление плат);
3) ожидание (поставки комплектующих изделий на склад, детали в очереди к станку).

По количеству затрачиваемого времени работа бывает: *действительной*, т.е. требующей затрат времени: *фиктивной*, не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами (передача измененных чертежей от конструкторов к технологам, сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению и т.д.).

Событие – момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д.

Таким образом, начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются начальным и конечным событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы (i, j), состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий, например (2, 4); 3–8.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий изображаются с помощью сетевого графика, где работы изображаются стрелками, которые соединяют вершины, изображающие события.

Работы, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют *исходным*. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется *завершающим*.

Пример графического изображения сетевого графика показан ниже.

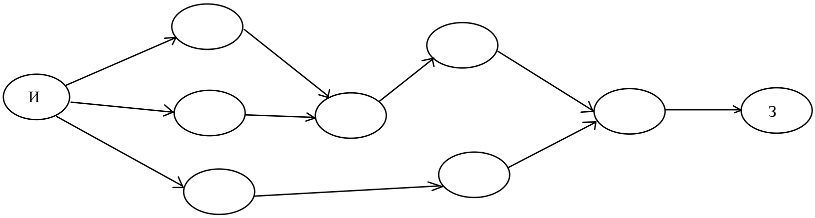


Рисунок 21. Примерный вид сетевого графика

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

1) длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;
2) стрелка не обязательно должна представлять прямолинейный отрезок;
3) для действительных работ используются сплошные стрелки, а для фиктивных – пунктирные;
4) каждая работа должна быть представлена только одной стрелкой, не должно быть параллельных работ между одними и теми же событиями;
5) не должно быть стрелок, направленных справа налево;
6) следует избегать пересечения стрелок, также не должно быть стрелок, направленных справа налево;
7) номер начального события работы должен быть меньше номера ее конечного события;
8) не должно быть висячих событий, кроме исходного события;
9) не должно быть тупиковых событий, кроме завершающего события;
10) не должно быть циклов в сетевом графике (рис. 22).

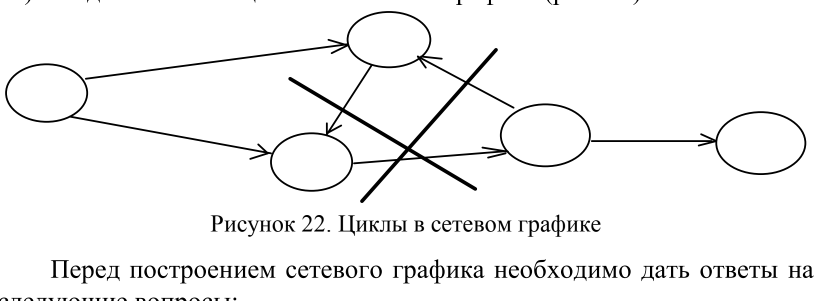


Рисунок 22. Циклы в сетевом графике

Перед построением сетевого графика необходимо дать ответы на следующие вопросы:

1) какие работы необходимо завершить непосредственно перед началом рассматриваемой работы?

2) какие работы должны непосредственно следовать после завершения данной работы?

3) какие работы могут выполняться параллельно с рассматриваемой работой?

Проиллюстрируем содержание этого пункта на простом примере.

Пример 17 (*построение сетевого графика*). Проанализировать проект постройки дома. Исходная информация представлена в следующей таблице:

Обозначение работы	Содержание работы	Продолжительность работы, дней
A	Заливка фундамента	2
B	Изготовление оконных рам, дверей	7
C	Изготовление шкафов, мебели	15
D	Монтаж водопроводной и канализационной сетей	8
E	Возведение стен	10
F	Оштукатуривание стен	2
G	Возведение крыши	6
H	Благоустройство территории	8
I	Установка мебели	2
J	Покраска внутри, снаружи	3

Решение. Учитывая содержание перечисленных работ, можно определить последовательность их выполнения: 1) D следует за E; 2) E следует за A и B; 3) F следует за D и G; 4) G следует за E; 5) H следует за G; 6) I следует за C и F; 7) J следует за I.

Используя определенную последовательность выполнения работ, можно построить следующую сетевую модель (график) проекта постройки дома (рис. 23).

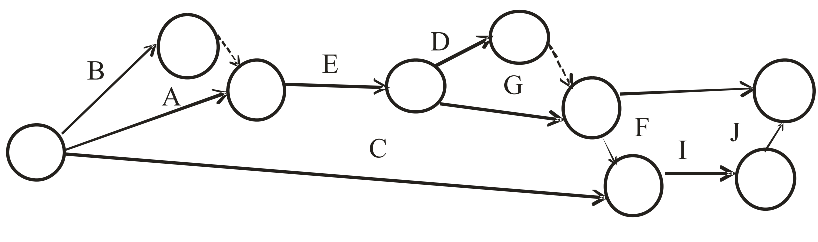


Рисунок 23. Сетевой график строительства дома

Здесь пунктирные стрелки (фиктивные работы с нулевой продолжительностью) используются для наглядности.

События (вершины) сетевого графика без направленных циклов всегда можно перенумеровать 1, 2, … так, чтобы для каждой направленной стрелки (работы) *(i, j)* номер *i* был меньше *j*.

Для этого имеется простой алгоритм, состоящий из трех шагов.

Шаг 1. Пронумеровать последовательно все вершины (взятые в произвольном порядке), не имеющие ни одной входящей работы (стрелки).

Шаг 2. Вычеркнуть все пронумерованные вершины и все выходящие из них работы.

Шаг 3. Если непронумерованных вершин нет, остановиться, в противном случае вернуться к шагу 1.

Результат работы алгоритма для сетевого графика рисунка 24.

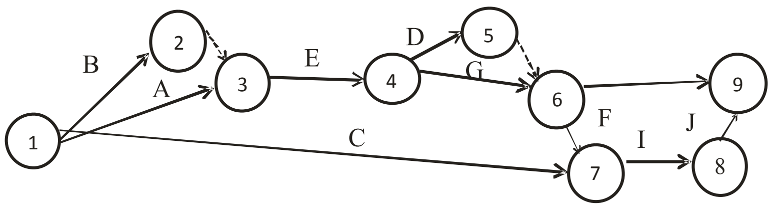


Рисунок 24. Сетевой график строительства дома
с пронумерованными событиями

Отметим, что в сетевом графике наименьший номер имеет исходное событие, а наибольший – завершающее.

7.3. Календарное планирование в СПУ

Применение методов СПУ должно обеспечить получение календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой работы. Для этого рассчитывают временные параметры для событий и работ сетевого графика.

К временным параметрам событий относятся: 1) ранний срок наступления события i – $T_р(i)$; 2) поздний срок наступления события i – $T_п(i)$; 3) резерв времени наступления события i – $R(i)$.

$T_р(i)$ – это время, необходимое для выполнения всех работ, предшествующих данному событию i.

$T_п(i)$ – это такое время наступления события i, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети.

$R(i)$ – это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события без нарушения сроков завершения проекта в целом.

При расчете временных параметров сетевого графика счет времени будем вести от момента наступления исходного (начального) события. Для удобства расчетов предположим, что ранний срок наступления исходного события равен нулю. Расчет ранних сроков наступления других событий ведется от исходного к завершающему событию.

1. Для исходного события $T_р(i) = 0$.
2. Для всех остальных событий

$$T_р(i) = \max_{(k,i)}\left(T_р(k) + t(k,i)\right),$$

где максимум берется по всем работам (k,i), входящим в событие i; а $t(k,i)$ – продолжительность работы.

Поздние сроки наступления событий рассчитываются от завершающего к исходному событию.

1. Для завершающего события $T_п(i) = T_р(i)$.
2. Для других событий

$$T_п(i) = \min_{(i,j)}(T_п(j) - t(i,j)),$$

где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i.

Резерв времени наступления события i, рассчитывается по формуле:

$$R(i) = T_п(i) - T_р(i).$$

Приведенные формулы проиллюстрируем.

Пример 18 (*расчет временных параметров*). Рассчитать временные параметры событий сетевого графика примера 17 (рис. 24).

Решение. Вначале рассчитаем ранние сроки наступления событий, следуя из исходного к завершающему событию.

Полагаем $T_р(1) = 0$. В вершину 2 (событие) входит одна работа (1, 2) (работа В) ее продолжительность $t\ (1,2) = 7$, поэтому

$$T_р(2) = T_р(1) + t\ (1,2) = 7.$$

В вершину 3 (событие) входят две работы (1, 3) с величиной $t(1,3) = 2$ и фиктивная работа (2, 3) с $t(2,3) = 0$, тогда значение

$$T_р(3) = \max_{(1,3),(2,3)}\{T_р(1) + t(1,3) = 2\,;\ T_р(2) + t(2,3) = 7\} = 7.$$

Далее: $T_р(4) = T_р(3) + t(3,4) = 7 + 10 = 17, T_р(5) = T_р(4) + t(4,5) = 17 + 8 = 25.$

$$T_p(6) = \max_{(4,6),(5,6)}\{T_p(4) + t(4,6) = 23\,;\ T_p(5) + t(5,6) = 25\} = 25.$$

$$T_p(7) = \max_{(1,7),(6,7)}\{T_p(1) + t(1,7) = 15\,;\ T_p(6) + t(6,7) = 27\} = 27.$$

$$T_p(8) = T_p(7) + t(7,8) = 29.$$

$$T_p(9) = \max_{(6,9),(8,9)}\{T_p(6) + t(6,9) = 33\,;\ T_p(8) + t(8,9) = 32\} = 33.$$

Отметим, что для каждого события i значение $T_р(i)$ равно полной продолжительности самого длинного направленного пути из вершины 1 в вершину i, величина $T_р(i) = 33$ показывает продолжительность реализации проекта постройки дома.

Теперь найдем поздние сроки наступления событий, следуя от завершающего к исходному событию. Для завершающего события

$$T_п(9) = T_р(9) = 33.$$

Поскольку из события 8 выходит только одна работа (8, 9), то

$$T_п(8) = T_п(9) - t(8,9) = 33 - 3 = 30.$$

Из события 7 выходит одна работа (7, 8), поэтому

$$T_п(7) = T_п(8) - t(7,8) = 30 - 2 = 28.$$

Две работы (6, 7) и (6, 9) выходят из события 6, следовательно

$$T_п(6) = \min_{(6,7),(6,9)}\{T_п(7) - t(6,7) = 26;\ T_п(9) - t(6,9) = 25\} = 25.$$

Далее $T_п(5) = T_п(6) - t(5,6) = 25 - 0 = 25.$

$$T_п(4) = \min_{(4,5),(4,6)}\{T_п(5) - t(4,5) = 17;\ T_п(6) - t(4,6) = 19\} = 17.$$

$$T_п(3) = T_п(4) - t(3,4) = 17 - 10 = 7.\ T_п(2) = T_п(3) - t(2,3) = 7.$$

$$T_п(1) = \min_{(1,2),(1,3),(1,7)}\{T_п(2) - t(1,2) = 0;\ T_п(3) - t(1,3) = 1;$$

$$T_n(7) - t(1,7) = 13\} = 0.$$

Результаты расчетов представим в виде следующей таблицы:

Номер события i	Ранний срок наступления события $i - T_р(i)$	Поздний срок наступления события $i - T_п(i)$	Резерв времени наступления события i $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$
1	0	0	0
2	7	7	0
3	7	7	0

4	17	17	0
5	25	25	0
6	25	25	0
7	27	28	1
8	29	30	1
9	33	33	0

На основе временных параметров событий определяют временные параметры работ сетевого графика. К наиболее важным временным параметрам работы (i, j) относят:

ранний срок начала работы $T_{рн}(i,j) = T_р(i)$.

поздний срок начала работы $T_{пн}(i,j) = T_п(j) - t(i,j)$;

ранний срок окончания работы $T_{ро}(i,j) = T_р(i) + t(i,j)$;

поздний срок окончания работы $T_{по}(i,j) = T_п(j)$;

полный резерв $R_п(i,j) = T_п(j) - T_р(i) - t(i,j)$;

свободный резерв $R_с(i,j) = T_р(j) - T_р(i) - t(i,j)$.

Временные параметры работ примера 18 представим в виде следующей таблицы. Коды работ записывают в определенном порядке: сначала записываются все работы, выходящие из исходного (первого) события, затем – второго события, далее – выходящие из третьего события, четвертого и т.д.

Код работы, (i,j)	$t(i,j)$	$T_{рн}(i,j)$	$T_{ро}(i,j)$, ст. 2 + ст. 3	$T_{пн}(i,j)$, ст. 6 – ст. 2	$T_{по}(i,j)$	$R_п(i,j)$, ст. 5 – ст. 3	$R_с(i,j)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
(1, 2)	7	0	7	0	7	0	0
(1, 3)	2	0	2	5	7	5	5
(1, 7)	15	0	15	13	28	13	12
(2, 3)	0	7	7	7	7	0	0
(3, 4)	10	7	17	7	17	0	0
(4, 5)	8	17	25	17	25	0	0
(4, 6)	6	17	23	19	25	8	2
(5, 6)	0	25	25	25	25	0	0
(6, 7)	2	25	27	26	28	1	0
(6, 9)	8	25	33	25	33	0	0
(7, 8)	2	27	29	28	3	1	0
(8, 9)	3	29	32	30	33	1	1

Рассмотрим понятия, связанные с работами сетевого графика:

1) **путь** – это любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы;
2) **полный путь** – это путь от исходного до завершающего события;
3) **критический путь** – максимальный по продолжительности полный путь;
4) события и работы, лежащие на критическом пути, называют **критическими**.

Сделаем важное замечание, поскольку **полный резерв времени работы** – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное событие работы наступит не позднее его позднего срока, то все некритические работы имеют полный резерв времени, отличный от нуля. Важнейшее свойство полного резерва работы заключается в том, что если его использовать частично или полностью, то уменьшится полный резерв у работ, лежащих с работой на одних путях. Полный резерв времени принадлежит не одной работе, а всем работам, лежащим на путях, проходящих через эту работу.

Отсюда следует достаточное условие: критические работы имеют нулевой полный резерв.

Каждое событие критического пути имеет нулевой резерв наступления, однако если для некоторого полного резерв времени наступления каждого события равен нулю, то путь не обязательно будет критическим.

Свободный резерв времени работы представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Этот резерв времени присущ только данной работе и его использование никак не повлияет на выполнение последующих работ. Критическая работа имеет нулевой свободный резерв времени, но обратный вывод неверен.

Для сетевого графика примера 17 на основании таблицы значений временных параметров работ (полный резерв работы равен нулю) имеем критические работы: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 9). Нетрудно видеть, что данные работы образуют критический путь сетевого графика. Сетевой график может содержать не один, а несколько критических путей.

В СПУ удобным дополнением к сетевому графику является **линейный график** (*график привязки или график Ганта*). На этом графике каждая работа *(i, j)* изображается в привязке к оси времени. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ). Работы изображаются в той же последовательности, что и на сетевом графике.

Пример 19 (*построение линейного графика*). Построить график привязки для примера 1 (рис. 25).

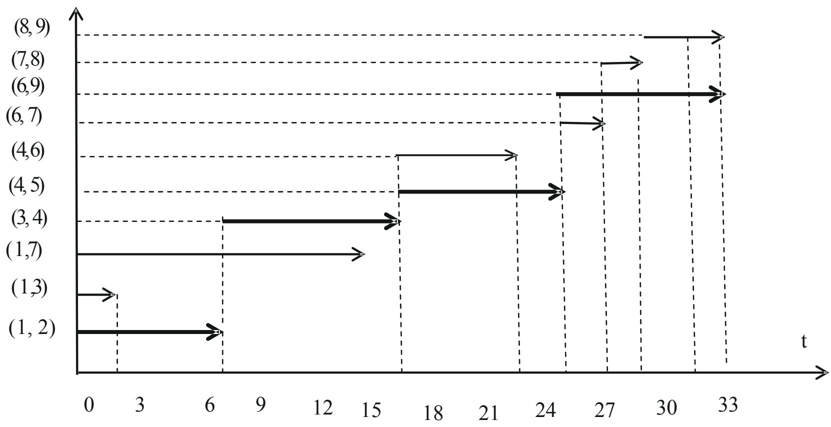


Рисунок 25. График привязки (Ганта)

На этом рисунке критические работы выделены жирным шрифтом.

7.4. Оперативное управление в СПУ

Расчет параметров сетевого графика позволяет выявить критические работы всего комплекса работ, продолжительность его реализации, резервы времени событий и работ, удостоверится, можно ли использовать график в качестве плана выполнения работ. Однако практика применения СПУ чаще всего требует улучшить сетевой график с учетом сроков выполнения работ и рационального использования материальных, трудовых и финансовых ресурсов. Для этого необходимо построить экономико-математические модели для сетевых графиков и решить оптимизационные задачи. Рассмотрим различные направления оптимизации в СПУ.

1. Управление проектами с неопределенной продолжительностью выполнения работ. В календарном планировании предполагается, что продолжительность выполнения работы известна. Однако на практике, как правило, возникают трудности в ее определении, поэтому используются вероятностные оценки продолжительности (времени) выполнения работ, включаемых в проект.

Для каждой работы вводят три оценки:

$T_\text{а}$ – оптимистическая оценка продолжительности работы;

$T_\text{п}$ – пессимистическая оценка продолжительности работы;

$T_\text{в}$ – наиболее вероятная оценка продолжительности работы;

По этим оценкам находят ожидаемую продолжительность выполнения работы

$$T = \frac{T_\text{а} + 4 \times T_\text{в} + T_\text{п}}{6}$$

и дисперсию ожидаемой продолжительности

$$\delta^2 = \left(\frac{T_\text{п} - T_\text{а}}{6}\right)^2.$$

Используя значения ожидаемых продолжительностей работ сетевого графика, находят критический путь и его продолжительность $T_\text{крит}$. Распределение времени завершения проекта принимают нормальным со средним $E(T_\text{крит})$, равным сумме ожидаемых значений продолжительностей работ на критическом пути, и дисперсией $\delta^2(T_\text{крит})$, равной сумме дисперсий работ критического пути, если времена выполнения каждой из работ можно считать независимыми друг от друга. В этом случае вероятность завершения проекта в установленный срок T_0 определится по формуле

$$P\left(T_\text{крит} < T_0\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{T_0 - E\left(T_\text{крит}\right)}{\delta(T)}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой берутся из специальной таблицы, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, можно также воспользоваться мастером функций пакета *Excel*.

Пример 20 (*управление проектами с неопределенной продолжительностью работ*). Компания разрабатывает строительный проект. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в таблице:

Работа	Предшествующие работы	Оптимистическая продолжительность, дней	Наиболее вероятная продолжительность, дней	Пессимистическая продолжительность, дней
A	–	3	5	6
B	–	2	4	6
C	A, B	5	6	7
D	A, B	7	9	10
E	B	2	4	6
F	C	1	2	3
G	D	5	8	10
H	D, F	6	8	10
I	E, G, H	3	4	5

Определить срок завершения проекта, стандартное отклонение времени завершения, вероятность, что выполнение проекта займет не более 25 дней.

Решение. Построим сетевой график проекта (рис. 26).

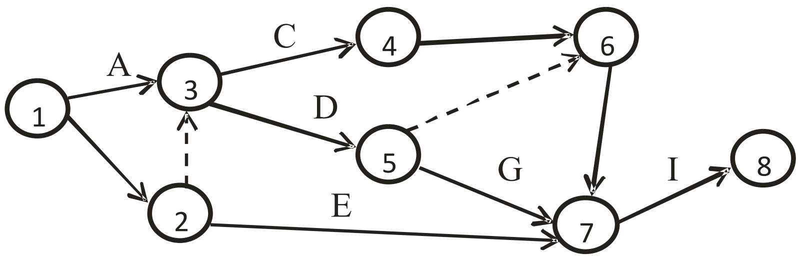


Рисунок 26. Сетевой график проекта

Определим ожидаемые продолжительности работ и их дисперсию

Работа	Код работы $(i,\ j)$	Ожидаемая продолжительность работы, $T(i,j)$	Дисперсия продолжительности работы, $\delta^2(i,j)$
B	(1, 2)	$(2+4\times4+6)/6=4$	$((6-2)/6)^2=0,44$
A	(1, 3)	$(3+4\times5+6)/6=4,8$	$((6-3)/6)^2=0,25$
Фиктивная	(2, 3)	0	0
E	(2,7)	$(2+4\times4+6)/6=4$	$((6-2)/6)^2=0,44$
C	(3, 4)	$(5+4\times6+7)/6=6$	$((7-5)/6)^2=0,11$
D	(3, 5)	$(7+4\times9+10)/6=8,8$	$((10-7)/6)^2=0,25$
F	(4, 6)	$(1+4\times2+3)/6=2$	$((3-1)/6)^2=0,11$
Фиктивная	(5, 6)	0	0
G	(5, 7)	$(5+4\times8+10)/6=7,8$	$((10-5)/6)^2=0,69$
H	(6, 7)	$(6+4\times8+10)/6=8$	$((10-6)/6)^2=0,44$
I	(7, 8)	$(3+4\times4+5)/6=4$	$((5-3)/6)^2=0,11$

Используя найденные ожидаемые продолжительности работ, определяем временные параметры событий, работ сетевого графика, (см. решение примера 18), которые представлены в следующих таблицах.

Временные параметры событий

Номер события i	Ранний срок наступления события i – $T_{\text{р}}(i)$, дней	Поздний срок наступления события i – $T_{\text{п}}(i)$, дней	Резерв времени наступления события i, $R(i) = T_{\text{п}}(i) - T_{\text{р}}(i)$
1	0	0	0
2	4	4, 8	0, 8
3	4, 8	4, 8	0
4	10, 8	11, 6	0, 8
5	13, 6	13, 6	0
6	13, 6	13, 6	0
7	21, 6	21, 6	0
8	25, 6	25, 6	0

Временные параметры работ

Код работы, (i,j)	$t(i,j)$	$T_{\text{рн}}(i,j)$	$T_{\text{ро}}(i,j)$, ст. 2 + ст. 3	$T_{\text{пн}}(i,j)$, ст. 6 – ст. 2	$T_{\text{по}}(i,j)$	$R_{\text{п}}(i,j)$, ст. 5 – ст. 3
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
(1, 2)	4	0	4	0, 8	4, 8	0, 8
(1, 3)	4, 8	0	4, 8	0	4, 8	0
(2, 3)	0	4	4	4, 8	4, 8	0, 8
(2, 7)	4	4	8	17, 6	21, 6	13, 6
(3, 4)	6	4, 8	10, 8	5, 6	11, 6	0, 8
(3, 5)	8, 8	4, 8	13, 6	4, 8	13, 6	0
(4, 6)	2	10, 8	12, 8	11, 6	13, 6	0, 8
(5, 6)	0	13, 6	13, 6	13, 6	13, 6	0
(5, 7)	7, 8	13, 6	21, 4	13, 8	21, 6	0, 2
(6, 7)	8	13, 6	21, 6	13, 6	21, 6	0
(7, 8)	4	21, 6	25, 6	21, 6	25, 6	0

На основании временных параметров работ найдем критические работы ($\boldsymbol{R}_{\text{п}}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \mathbf{0}$), критический путь и его продолжительность.

Критический путь состоит из работ: (1, 3), (3, 5), ((5, 6), (6, 7), (7, 8), его продолжительность $E\left(T_{\text{крит}}\right) = 25,6$. Дисперсия продолжительности критического пути равна сумме дисперсий критических работ

$$\delta(T_{\text{крит}})^2 = 0,25 + 0,25 + 0 + 0,44 + 0,11 = 1,05.$$

Стандартное отклонение времени завершения проекта $E(T_{\text{крит}})$ составит $\delta(T) = \sqrt{1,05} = 1,03$.

Вероятность того, что выполнение проекта займет не более 25 дней, определяется по формуле:

$$P(T_{\text{крит}} < 25) = 0,5 + \Phi\left(\frac{25 - 25,6}{1,03}\right) =$$
$$= 0,5 + \Phi(-0,58) = 0,5 - 0,219 = 0,281.$$

2. Оптимизация проекта по времени. Рассмотрим две постановки задач сокращения времени реализации проекта, с использованием дополнительных средств. Первая задача заключается в определении величин дополнительных вложений в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения (продолжительность критического пути) не превышал заданной величины, а суммарный расход дополнительных средств был минимальным. Вторая задача направлена на сокращения срока выполнения проекта на столько, сколько это возможно за счет вложения дополнительных средств, не превышающих определенную величину. Более детальную постановку и решение указанных задач рассмотрим на примерах.

Пример 21 (*оптимизация проекта по времени, при минимуме дополнительных средств*). Для сетевого графика примера 17 известно, что вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i,j) сокращает время ее выполнения до величины $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} \times x_{ij}$, где k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных средств. Сокращение продолжительности работы ограничено, т.е. для каждой работы определена минимально возможная продолжительность ее выполнения d_{ij}, которая при $k_{ij} = 0$ совпадает с t_{ij}.

Заданы: 1) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}} = 29$; 2) технологические коэффициенты использования дополнительных средств $k_{17} = 0,1$; $k_{34} = 0,3$; $k_{67} = 0,2$; $k_{69} = 0,5$; остальные коэффициенты нулевые; 3) продолжительность выполнения указанных работ – не меньше $d_{17} = 10$; $d_{34} = 6$; $d_{67} = 2$; $d_{69} = 5$.

Требуется определить: 1) календарный план $T_{\text{н}}(i,j)$, $T_{\text{о}}(i,j)$ выполнения работ, 2) использование дополнительных средств x_{ij}, чтобы суммарное количество используемых дополнительных средств было минимальным.

Время выполнения всего комплекса работ не превышало $T_{\text{дир}} = 29$.

Решение. Составим экономико-математическую модель примера.

Целевая функция имеет вид

$$min\,\{x_{17} + x_{34} + x_{67} + x_{69}\}$$

при ограничениях на переменные:

а) на продолжительность работ

$$T_о(1,2) - T_н(1,2) \geq 7,\ T_о(1,3) - T_н(1,3) \geq 2,$$
$$T_о(1,7) - T_н(1,7) \geq 10,\ T_о(2,3) - T_н(2,3) \geq 0,$$
$$T_о(3,4) - T_н(3,4) \geq 6,\ T_о(4,5) - T_н(4,5) \geq 8,$$
$$T_о(4,6) - T_н(4,6) \geq 7,\ T_о(5,6) - T_н(5,6) \geq 0,$$
$$T_о(6,7) - T_н(6,7) \geq 2,\ T_о(6,9) - T_н(6,9) \geq 5,$$
$$T_о(7,8) - T_н(7,8) \geq 2,\ T_о(8,9) - T_н(8,9) \geq 3;$$

б) своевременную выполняемость всех предшествующих работ:

$$T_н(1,2) = 0;\ T_н(1,3) = 0;$$
$$T_н(1,7) = 0,\ T_н(2,3) \geq T_о(1,2),$$
$$T_н(3,4) \geq T_о(1,3),\ T_н(3,4) \geq T_о(2,3),$$
$$T_н(4,5) \geq T_о(3,4),\ T_н(4,6) \geq T_о(3,4),$$
$$T_н(5,6) \geq T_о(4,5),\ T_н(6,7) \geq T_о(4,6),$$
$$T_н(6,7) \geq T_о(5,6),\ T_н(6,9) \geq T_о(4,6),$$
$$T_н(6,9) \geq T_о(5,6),\ T_н(7,8) \geq T_о(6,7),$$
$$T_н(7,8) \geq T_о(1,7),\ T_н(8,9) \geq T_о(7,8);$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных в них средств:

$$T_о(1,7) - T_н(1,7) = 15 - 0,1 \times x_{12},$$
$$T_о(3,4) - T_н(3,4) = 10 - 0,3 \times x_{34},$$
$$T_о(6,7) - T_н(6,7) = 2 - 0,2 \times x_{67},$$
$$T_о(6,9) - T_н(6,9) = 8 - 0,5 \times x_{69};$$

г) на время выполнения проекта

$$T_о(6,9) \leq 29;\ T_о(8,9) \leq 29;$$

д) все переменные неотрицательные.

Данная модель является задачей линейного программирования относительно переменных $T_н(i,j)$ – время начало работы, $T_о(i,j)$ – время окончания работы, а также x_{ij} величина дополнительных средств вложенных в работу (i,j).

Решение этой задачи в среде *Excel* с помощью надстройки «Поиск решения» представлено на рисунке 27.

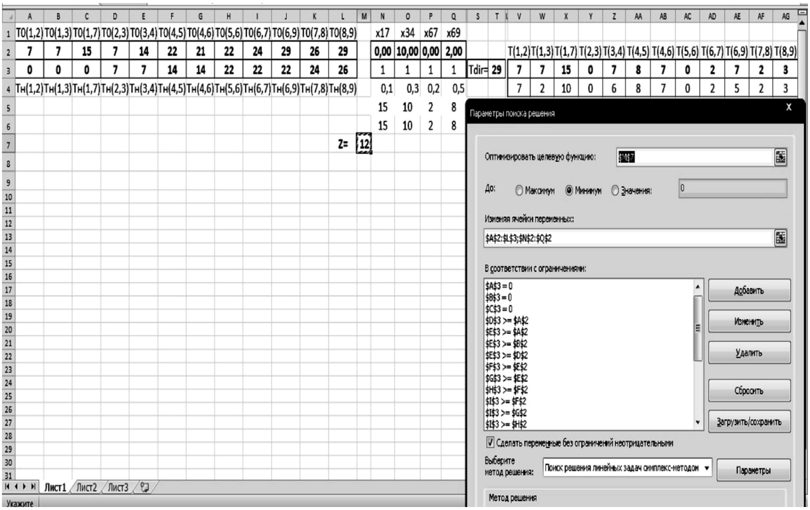


Рисунок 27. Результаты решения примера

Пример 22 (*оптимизация проекта по времени при минимуме продолжительности критического пути*). Для проекта примера 17сократить срок его выполнения, на сколько это возможно, за счет вложения дополнительных средств в выполнение работ, исходные данные примера 21, не превышающей общей величины 16 единиц.

Решение. Составим ЭММ. Целевая функция имеет вид

$$min\,\{T_0\}$$

при ограничениях на переменные:

а) на время выполнения проекта:

$$T_о(6{,}9) \le T_0;\ T_о(8{,}9) \le T_0;$$

б) на дополнительные средства:

$$\{x_{17} + x_{34} + x_{67} + x_{69}\} \le 16;$$

в) на продолжительность работ:

$$T_о(1{,}2) - T_н(1{,}2) \ge 7,\ T_о(1{,}3) - T_н(1{,}3) \ge 2;$$

$$T_о(1{,}7) - T_н(1{,}7) \ge 10,\ T_о(2{,}3) - T_н(2{,}3) \ge 0;$$

$$T_о(3{,}4) - T_н(3{,}4) \ge 6,\ T_о(4{,}5) - T_н(4{,}5) \ge 8;$$

$$T_о(4{,}6) - T_н(4{,}6) \geq 7,\ T_о(5{,}6) - T_н(5{,}6) \geq 7;$$
$$T_о(6{,}7) - T_н(6{,}7) \geq 2,\ T_о(6{,}9) - T_н(6{,}9) \geq 5;,$$
$$T_о(7{,}8) - T_н(7{,}8) \geq 2,\ T_о(8{,}9) - T_н(8{,}9) \geq 3;$$

г) своевременную выполняемость всех предшествующих работ:

$$T_н(1{,}2) = 0;\ T_н(1{,}3) = 0;\ T_н(1{,}7) = 0;$$
$$T_н(2{,}3) \geq T_о(1{,}2),\ T_н(3{,}4) \geq T_о(1{,}3);$$
$$T_н(3{,}4) \geq T_о(2{,}3),\ T_н(4{,}5) \geq T_о(3{,}4);$$
$$T_н(4{,}6) \geq T_о(3{,}4),\ T_н(5{,}6) \geq T_о(4{,}5);$$
$$T_н(6{,}7) \geq T_о(4{,}6),\ T_н(6{,}7) \geq T_о(5{,}6);$$
$$T_н(6{,}9) \geq T_о(4{,}6),\ T_н(6{,}9) \geq T_о(5{,}6);$$
$$T_н(7{,}8) \geq T_о(6{,}7),\ T_н(7{,}8) \geq T_о(1{,}7),\ T_н(8{,}9) \geq T_о(7{,}8);$$

д) зависимость продолжительности работ от вложенных в них средств:

$$T_о(1{,}7) - T_н(1{,}7) = 15 - 0{,}1 \times x_{12};$$
$$T_о(3{,}4) - T_н(3{,}4) = 10 - 0{,}3 \times x_{34};$$
$$T_о(6{,}7) - T_н(6{,}7) = 2 - 0{,}2 \times x_{67};$$
$$T_о(6{,}9) - T_н(6{,}9) = 8 - 0{,}5 \times x_{69};$$

е) все переменные неотрицательные.

Решение примера 22 в среде *Excel* с помощью надстройки «Поиск решения» представлено на рис. 28.

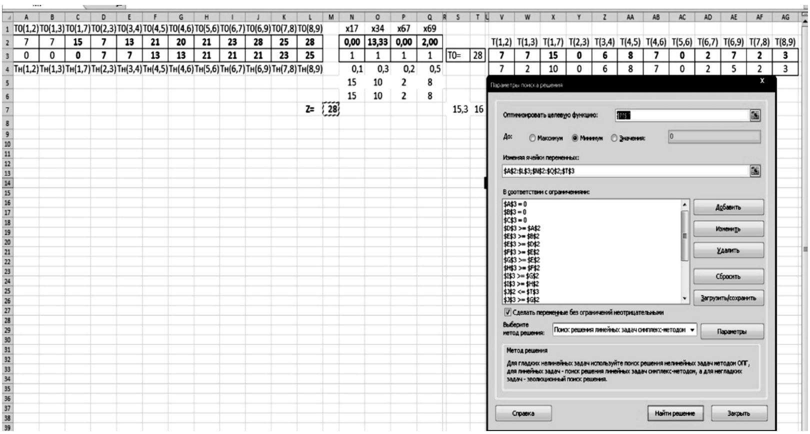


Рисунок 28. Результаты решения

3. Оптимизация проекта по стоимости. Стоимость выполнения каждой работы в сумме с дополнительными расходами определяют стоимость проекта. Как мы показали в предыдущем пункте, с помощью дополнительных ресурсов можно добиться сокращения времени выполнения критических работ. Однако стоимость этих работ возрастет, но общее время выполнения проекта уменьшится. Это в конечном итоге может привести к снижению общей стоимости проекта.

Считаем, что затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Величина

$$k_{ij} = \frac{C_{ij}-c_{ij}}{D_{ij}-d_{ij}}$$ – *коэффициент дополнительных затрат (КДЗ),*

где d_{ij} – минимальная продолжительность работы (срочный режим выполнения), которой соответствуют наибольшие затраты – C_{ij}; D_{ij} – наибольшая (нормальная) продолжительность работы, ей соответствуют наименьшие затраты – c_{ij}. Эта величина показывает насколько увеличится стоимость работы (i, j), при уменьшении ее продолжительности на единицу времени.

Рассмотрим две задачи оптимизации проекта по стоимости:

1) минимизация критического пути при ограниченной величине стоимости выполнения проекта;
2) минимизации стоимости выполнения проекта при фиксированной продолжительности критического пути.

Алгоритм решения первой задачи реализуется следующими шагами.

Предварительный шаг. Определяются КДЗ для каждой работы проекта. Используя нормальные продолжительности работ D_{ij} находим критический путь, его продолжительность, полные резервы некритических работ сетевого графика и затраты на реализацию проекта.

Шаг 1. Среди критических работ находим работу с наименьшим КДЗ. Если эта работа является общей для всех критических путей или если критический путь один, то она подлежит сокращению. Если эта работа не является общей для критических путей, но пути имеют одну или несколько общих работ, то на каждом из них находим работу с наименьшим КДЗ, суммируем КДЗ этих работ и сравниваем с наименьшим КДЗ общих работ. Если сумма КДЗ не больше КДЗ общей работы критических путей, то все эти работы необходимо сократить. Если сумма КДЗ работ больше наименьшего КДЗ общей работы, то сокращению подлежит общая для критических путей работа с наименьшим КДЗ. Если критические пути не имеют общих работ, то на каждом из них находим работу с наименьшим КДЗ.

Шаг 2. Сокращаем продолжительность работы (работ) на такую величину, чтобы достичь минимальной продолжительности d_{ij} или получить новый критический путь (полный резерв времени одной из некритических работ станет нулевым).

Шаг 3. Для нового варианта сетевого графика определяем критический путь, его продолжительность и стоимость реализации проекта.

Шаг 4. Проверяем, все ли работы критического пути имеют минимальную продолжительность. Если это имеет место, то задача решена, проведена минимизация критического пути при ограниченной величине стоимости выполнения проекта. В противном случае возвращаемся к шагу 1.

Рассмотрим теперь решение второй задачи – минимизация стоимости выполнения проекта при фиксированной продолжительности T_0 критического пути. Приведем описание алгоритма для решения этой задачи.

Шаг 1. Для сетевого графика проекта по известным продолжительностям работ и их стоимостям в срочном режиме (d_{ij}, C_{ij}) определяем критический путь, его продолжительность $T_{\text{крит}}$ и стоимость реализации проекта *C*. Стоимость *C* при этом является максимальной. Отметим, что если $T_{\text{крит}} > T_0$, то задача не имеет решения, поскольку увеличение продолжительности выполнения некоторых работ (стоимость С уменьшается) может только увеличить $T_{\text{крит}}$.

Шаг 2. Строим ЭММ минимизации стоимости C при фиксированном сроке T_0 реализации проекта за счет увеличения продолжительности выполнения отдельных работ. Если $T_{\text{крит}} = T_0$, минимизация стоимости возможна только за счет резервов некритических работ, если $T_{\text{крит}} < T_0$, то за счет всех работ проекта. После решения задачи все работы проекта будут критическими, поскольку их продолжительность будет достигать наибольших возможных значений. Ни одно событие, ни одна работа не будут иметь положительный резерв. Моменты времени начала и окончания работы (i, j) совпадают со сроками свершений t_i, t_j событий. Продолжительность работы t_{ij} в оптимальном плане равна $t_j - t_i$, а стоимость работы за время ее выполнения определяется по формуле $c_{ij} = C_{ij} - k_{ij} \times (t_j - t_i - d_{ij})$. В результате целевую функцию ЭММ можно записать в виде:

$$min\{C = \sum_{(i,j)\in G}(C_{ij} + k_{ij}d_{ij}) - \sum_{(i,j)\in G} k_{ij} \times (t_j - t_i)\},$$

где G – множество работ сетевого графика. Поскольку первая сумма в фигурных скобках постоянна, то минимальное значение стоимости C достигается для тех переменных t_i, t_j, при которых имеет максимум $\sum_{(i,j)\in G} k_{ij} \times (t_j - t_i)$. Поэтому ЭММ можно записать в виде:

$$max\{K = \sum_{(i,j)\in G} k_{ij} \times (t_j - t_i)\}$$

при ограничениях

$$t_j - t_i \geq d_{ij}, (i,j) \in G; \textit{ все переменные неотрицательные;}$$

$$t_1 = 0, t_n \leq T_0,$$

где t_1, t_n – сроки свершения исходного и завершающего события.

Пример 23 (*оптимизация проекта по стоимости*). Для сетевого графика примера 20 и количественной информации представленной в следующей таблице

Код работы, (i,j)	Стандартная продолжительность работы D_{ij}, дней	Срочная продолжительность работы d_{ij}, дней	Затраты при стандартной продолжительности работ, тыс. у.е.	Затраты при срочной продолжительности работ, тыс. у.е.
(1, 2)	6	2	900	2700
(1, 3)	6	3	2000	4000
(2, 3)	0	0	0	0
(2, 7)	7	5	1400	1680
(3, 4)	10	7	1800	2340
(3, 5)	6	2	1000	3000
(4, 6)	3	1	500	1500
(5, 6)	0	0	0	0
(5, 7)	10	5	1200	2400
(6, 7)	10	6	1100	1760
(7, 8)	5	3	800	1120

Минимизировать общую стоимость проекта при фиксированной продолжительности критического пути $T_0 = 25$.

Решение. Применим описанный выше алгоритм.

Шаг 1. По известной продолжительности работ и их стоимостям в срочном режиме (d_{ij}, C_{ij}) определяем критический путь, его продолжительность $T_{крит}$ и стоимость реализации проекта C. Для этого определяем временные параметры событий и работ сетевого графика на рис. 26.

Временные параметры событий

Номер события i	Ранний срок наступления события i - $T_р(i)$, дней	Поздний срок наступления события i - $T_п(i)$, дней	Резерв времени наступления события i – $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$
1	0	0	0
2	2	3	1
3	3	3	0
4	10	10	0
5	5	11	6
6	11	11	0
7	17	17	0
8	20	20	0

Временные параметры работ

Код работы, (i, j)	$t(i, j)$	$T_{рн}(i, j)$	$T_{ро}(i, j)$, ст. 2 + ст. 3	$T_{пн}(i, j)$, ст. 6 – ст. 2	$T_{по}(i, j)$	$R_п(i, j)$, ст. 5 – ст. 3
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
(1, 2)	2	0	2	1	3	1
(1, 3)	3	0	3	0	3	0
(2, 3)	0	2	2	3	3	1
(2, 7)	5	2	7	12	17	10
(3, 4)	7	3	10	3	10	0
(3, 5)	2	3	5	9	11	6
(4, 6)	1	10	11	10	11	0
(5, 6)	0	5	5	11	11	6
(5, 7)	5	5	10	12	17	7
(6, 7)	6	11	17	11	17	0
(7, 8)	3	17	20	17	20	0

На основании временных параметров работ найдем критические работы ($\boldsymbol{R}_п(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \mathbf{0}$), критический путь и его продолжительность.

Критический путь состоит из работ: (1, 3), (3, 4), ((4, 6), (6, 7), (7, 8), его продолжительность $T_{крит} = 20$ дней. Стоимость выполнения проекта в срочном случае $C = 75\ 600$ у. е.

Шаг 2. Строим ЭММ минимизации стоимости C при фиксированном сроке $T_0 = 26$ реализации проекта. Отметим, что поскольку в данном случае $T_{крит} = 20 < T_0 = 26$, то минимизация стоимости возможна за счет всех работ проекта.

Определим КДЗ для всех работ проекта.

Код работы, (i, j)	Коэффициент дополнительных затрат (КДЗ), тыс. у.е./день
(1, 2)	450,00
(1, 3)	666,67
(2, 7)	140,00
(3, 4)	180,00
(3, 5)	500,00
(4, 6)	500,00
(5, 7)	240,00
(6, 7)	165,00
(7, 8)	160,00

Запишем ЭММ задачи:

$$\max\ \{450(t_2 - t_1) + 666{,}67(t_3 - t_1) + 140(t_7 - t_2) + 180(t_4 - t_3) + \\ +500(t_5 - t_3) + 500(t_6 - t_4) + 240(t_7 - t_5) + 165(t_7 - t_6) + \\ +160(t_8 - t_7)\}$$

при ограничениях:

$$t_2 - t_1 \geq 2,\ t_3 - t_1 \geq 3,$$
$$t_3 - t_2 \geq 0,\ t_7 - t_2 \geq 5,$$
$$t_4 - t_3 \geq 7,\ t_5 - t_3 \geq 2,\ t_6 - t_4 \geq 1,$$
$$t_6 - t_5 \geq 0,\ t_7 - t_5 \geq 5,$$
$$t_7 - t_6 \geq 6,\ t_8 - t_7 \geq 3,\ t_1 = 0, t_n \leq 25,$$

все переменные неотрицательные.

Приведем решение примера 23 в среде *Excel* с помощью надстройки «Поиск решения».

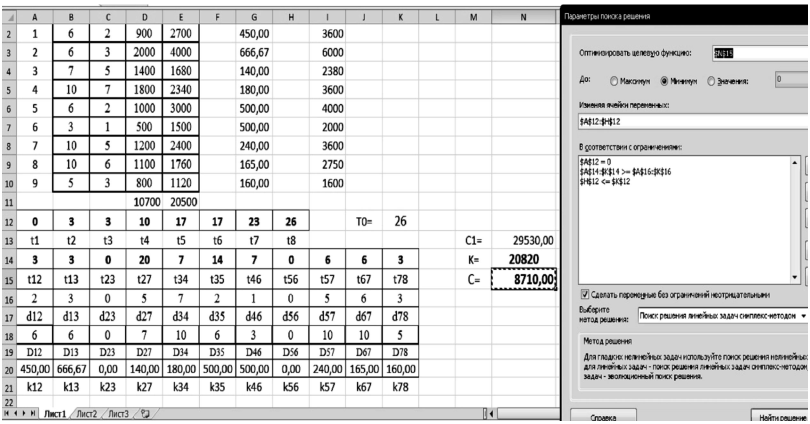


Рисунок 29. Результаты решения примера

4. Оптимизация проекта по ресурсам. Задача распределения ресурсов по работам сетевого графика является одной из важнейших. Для простоты изложения решения этой задачи рассмотрим случай, когда используется один вид ресурсов.

Предполагаем, что для каждой работы известна продолжительность ее выполнения и интенсивность потребления ресурса. Под интенсивностью потребления будем понимать количество ресурса в единицу времени, требуемое для выполнения работы. Рассмотрим случай, когда интенсивность потребления для каждой работы постоянная.

Чаще всего для выполнения работ стремятся организовать распределение ресурсов таким образом, чтобы количество одновременно распределенных ресурсов было минимальным, не превышающим определенную величину; потребность в ресурсах на протяжении срока выполнения проекта была в основном стабильной.

При решении задачи распределения ресурсов по работам широкое применение получили эвристические алгоритмы. Эти алгоритмы не всегда позволяют найти оптимальное решение задачи, однако часто дают хорошее приближение к нему. Для проведения подобного вида оптимизации строят и анализируют графики *привязки* (график Ганта) и *загрузки*.

Напомним (см. рис. 25), что *график привязки* отображает взаимосвязь, выполняемых работ во времени и строится на основе данных о ранних сроках начала и окончания работ. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ). Работы изображаются в той же последовательности, что и на сетевом графике.

На *графике загрузки* по горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной оси – сумма интенсивностей потребления ресурсов. Для построения графика загрузки необходимо: 1) на графике привязки над каждой работой написать интенсивность потребления ресурсов; 2) подсчитать сумму интенсивностей в каждую единицу времени и отложить ее на графике загрузки.

Пример 24 (*оптимизация проекта по ресурсам*). Для графика привязки рис. 26 и дополнительной информации, представленной в следующей таблице, построить график загрузки.

Код работы, (i, j)	$t(i, j)$	$T_{\text{рн}}(i, j)$	$T_{\text{ро}}(i, j)$, ст. 2 + ст. 3	Интенсивность потребления ресурса
1	**2**	**3**	**4**	**5**
(1, 2)	7	0	7	6
(1, 3)	2	0	2	1
(1, 7)	15	0	15	7
(2, 3)	0	7	7	0
(3, 4)	10	7	17	5
(4, 5)	8	17	25	4
(4, 6)	6	17	23	3
(5, 6)	0	25	25	0
(6, 7)	2	25	27	2
(6, 9)	8	25	33	6
(7, 8)	2	27	29	2
(8, 9)	3	29	32	3

Решение. Построим график привязки с указанием интенсивностей потребления ресурсов по работам.

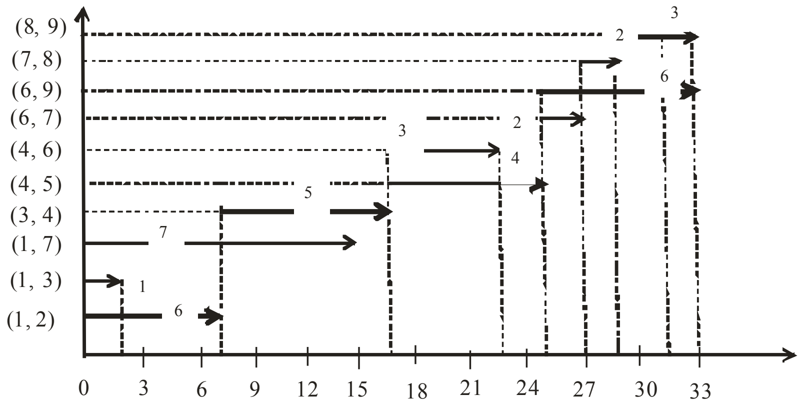


Рисунок 30. График привязки с указанием интенсивности потребления ресурсов

Строим график загрузки.

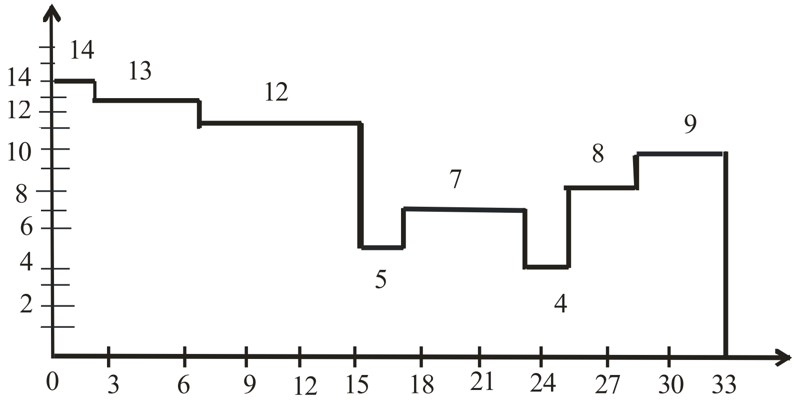


Рисунок 31. График загрузки с указанием суммы интенсивностей потребления ресурсов

Отметим, что для удобства построения и анализа графики привязки и загрузки следует располагать в одной системе координат.

Алгоритмы решения задачи рационального распределения ресурсов по работам используют сдвиг во времени выполнения некритических работ. В результате изменятся начало и окончание работ при той же продолжительности критического пути, что в свою очередь приведет к уменьшению количества ресурсов, используемых одновременно для выполнения работ. Уровень графика загрузки снизится, он станет более гладким. Приведем пошаговое описание одного алгоритма такого типа.

Предварительный шаг. Определяем временные параметры событий, работ проекта, критический путь, его продолжительность $T_{\text{крит}}$. Составляем график привязки.

Шаг 1. Состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы, обозначим проекцию в начале координат через T_0, а следующую за ней – через T_1.

Этап 2. Нумеруем работы, расположенные над промежутком (T_0, T_1), в порядке возрастания их полных резервов. Работы с одинаковыми полными резервами времени нумеруем в порядке убывания их интенсивностей.

Этап 3. Суммируем последовательно интенсивности работ, расположенных над промежутком (T_0, T_1) в порядке возрастания их номеров, и сравниваем сумму S с количеством имеющихся ресурсов R. Рассмотренные работы, сумма интенсивностей которых не превосходит R, оставляем в первоначальном положении на графике привязки. Если после прибавления интенсивности какой-нибудь работы суммарное потребление ресурсов $S > R$, то эту работу сдвигаем вправо на величину рассматриваемого промежутка времени, ее интенсивность не включаем в сумму S, переходим к рассмотрению следующей работы и так продолжаем пока не будут рассмотрены все работы, расположенные над промежутком (T_0, T_1).

В результате выполнения описанных этапов получаем график загрузки уровня, равного S, для промежутка времени (T_0, T_1) и график привязки оставшихся работ, расположенных над промежутком $(T_1, T_{\text{крит}})$, которые изображаем таким образом, чтобы их начала совпадали с новыми ранними сроками свершения событий.

Общий шаг. Предположим, что выполнено k шагов алгоритма и получен график привязки, для которого момент T_kявляется началом оставшейся части комплекса работ. Выполним следующие этапы шага.

Этап 1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы, расположенной над промежутком $(T_k, T_{\text{крит}})$, и обозначим ближайшую к T_k проекцию через T_{k+1}.

Этап 2. Определяем полные резервы работ, расположенных над промежутком (T_k, T_{k+1}) и нумеруем их. В первую очередь нумеруем работы, которые были начаты раньше момента T_k, согласно возрастанию разностей между полными резервами этих работ и длительностями от начала до момента T_{k+1}. Работы с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания их интенсивности. Остальные работы нумеруем в порядке возрастания их полных резервов, а с одинаковыми резервами – в порядке убывания интенсивности.

Этап 3. Действия выполняются аналогично этапу 3 шага 1, за следующим исключением: если сдвигу подлежит работа, начатая ранее момента T_k, то ее начало устанавливаем в момент T_{k+1}.

Этап 4. Строим график загрузки уровня, равного S, для промежутка времени (T_k, T_{k+1}) и график привязки оставшихся работ, расположенных над промежутком $(T_{k+1}, T_{\text{крит}})$. Если не все работы просмотрены, возвращаемся к этапу 1. В противном случае решение задачи получено, построен рациональный график загрузки ресурса по работам и календарный график выполнения работ.

8. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

8.1. Определение и сущность теории игр

Впервые теория игр была систематически изложена Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 г. Во время второй мировой войны теория игр была применена в военном деле для исследования стратегических решений. Во второй половине XX в. главное внимание в теории игр стало уделяться экономическим приложениям.

Любое социально-экономическое явление носит в той или иной степени черты конфликта, следовательно, соответствующая экономико-математическая модель, которая называется **игрой**, должна это отражать. Введем необходимые понятия.

В игре участвует некоторое количество (множество) заинтересованных сторон, которые обычно называются **игроками**. Если число игроков конечно, то они различаются либо по номерам, либо по названиям (1-й игрок и 2-й игрок в игре с монетой, продавец и покупатель в ситуации монополии и др.). Возможные действия каждой из сторон (игроков) называются **ходами** или **стратегиями.**

Для каждого игрока интересы представлены **функциями выигрыша (платежа).** Эти функции можно трактовать как **функции полезности** для каждой из сторон. В теории игр предполагается, что функции выигрыша и множество доступных для каждого игрока стратегий известны. Каждый игрок знает как свои функции выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, так и функции выигрыша и стратегии остальных игроков. В соответствии с этой информацией он и организует свое поведение, т. е. определяет выбор своей стратегии.

Игры классифицируются по разным признакам: по числу игроков, по свойствам функции выигрыша, по способу взаимодействия между игроками в ходе игры. В зависимости от числа заинтересованных сторон различают **игры с двумя**, **тремя** и более участниками. Возможны также **игры с бесконечным числом игроков**.

По количеству стратегий различают **игры конечные и бесконечные**. В конечных играх в распоряжении игроков конечное число возможных стратегий. В таком случае сами стратегии называются **чистыми стратегиями**.

В бесконечных играх игроки обладают бесконечным числом возможных стратегий (в ситуации продавец – покупатель каждый из игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого или покупаемого товара).

По свойствам функций выигрыша игры различаются по следующим трем категориям.

Первая – когда выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (или общая сумма выигрыша равна общей сумме проигрыша); такие игры называются **играми с пулевой суммой**, или **антагонистическими играми** (карточные игры).

Вторая категория включает **игры с постоянной разностью**, когда игроки выигрывают и проигрывают одновременно, поэтому им выгодно действовать сообща; игры этой категории являются прямой противоположностью играм первой категории.

К третьей категории относятся игры между этими двумя крайними случаями – множество **игр с ненулевой суммой**, когда имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

Различают **кооперативные и некооперативные игры**. В кооперативных играх игроки до начала игры образуют коалиции и принимают взаимно обязывающие соглашения о своих стратегиях (образование коалиций и групп в парламенте). Если же игроки не могут координировать свои стратегии, игра называется **некооперативной** (все антагонистические игры являются некооперативными играми).

В случае игры двух игроков функции выигрыша каждого из них удобно представлять в виде **матрицы выигрышей** или **матрицы платежей**, в которой строки представляют стратегии одного игрока, а столбцы – стратегии другого игрока; в клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков для каждой ситуации. Рассмотрим примеры.

Пример 25 (*игра 1 с двумя игроками и нулевой суммы*). Игра в орлянку (монету). Каждый из игроков имеет две стратегии – «Орел» и «Решка». Если оба выбирают одинаковые стратегии (оба говорят «Орел» или «Решка»), 1-й игрок выигрывает 10 ед., а 2-й проигрывает 10 ед.; если они выбирают разные стратегии, то 2-й игрок выигрывает 10 ед., а 1-й проигрывает 10 ед. Определить матрицы выигрышей каждого игрока.

Решение. Каждый из игроков имеет две стратегии, поэтому матрицы выигрышей квадратные второго порядка. Для первого игрока, согласно условиям примера, матрица выигрышей имеет вид:

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	10	–10
	Решка	–10	10

Для 2-го игрока матрица выигрышей равна матрице выигрышей 1-го игрока (с противоположным знаком):

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	–10	10
	Решка	10	–10

Для наглядности матрицы выигрышей обоих игроков объединяют в одну биматрицу, которая дает полную информацию о всей игре:

		Стратегии 2-го игрока	
		Орел	Решка
Стратегии 1-го игрока	Орел	(10;–10)	(–10;10)
	Решка	(–10;10)	(10;–10)

Пример 26 (*игра 2 с двумя игроками и ненулевой суммой*). Две фирмы функционируют на рынке одновременно, с одинаковым товарным объемом V. У обеих фирм по соображениям рентабельности есть следующие стратегии: 1) выбросить на рынок полный объем товара V; 2) выбросить половину объема 0,5 V.

Если 1-я фирма выбрасывает на рынок полный объем V, а 2-я – половину объема 0,5 V, то 1-я получает 100% запланированной прибыли, а 2-я – только 25%.

Если обе фирмы выбросят на рынок по полному объему V, то получат по 15% прибыли, а если по 0,5 V, то прибыль каждой из фирм составит по 50% от запланированной. Определить биматрицу выигрышей.

Решение. Биматрица выигрышей для игроков имеет следующий вид:

		Стратегии 2-го игрока	
		V	0, 5 V
Стратегии 1-го игрока	V	(15; 15)	(100; 25)
	0, 5 V	(25;100)	(50; 50)

В общем случае двух партнеров-соперников A и B, имеющих в своем распоряжении соответственно $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ стратегий, платежная матрица H имеет вид:

		Стратегии игрока B				
		B_1		B_j		B_n
Стратегии игрока A	A_1	h_{11}	……	h_{1j}		h_{1n}
		…..	…..	…..	…..	…..
	A_i	h_{i1}	…..	h_{ij}	…..	h_{in}
		…	….	….	…..	…..
	A_m	h_{m1}	…..	h_{mj}	….	h_{mn}

где элемент матрицы h_{ij} – выигрыш при принятии игроком A i-й стратегии, а игроком B j-ой стратегии.

В заключение рассмотрим пример определения функции выигрыша в игре с бесконечным числом возможных стратегий игроков.

Пример 27 (*бесконечное число возможных стратегий игроков*). Каждый из игроков может назвать цену p, по которой он хочет продать определенное количество товара. При этом предполагается, что потребители приобретут товар у фирмы, объявившей меньшую цену; в случае объявления одинаковой цены спрос *D(p)* распределяется между фирмами поровну. Определить функцию выигрыша с бесконечным числом стратегий у игроков.

Решение. Поскольку число возможных стратегий у игроков не конечно, то функцию выигрыша нельзя определить в виде матрицы, как в предыдущих примерах. В данном примере ее можно выразить в виде следующих правил:

$$R(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i \cdot D(p_i), & \text{если } p_i < p_j, \\ p_i \cdot D(p_i)/2, & \text{если } p_i = p_j, (i \neq j, i, j = 1{,}2), \\ p_j \cdot D(p_j) & \text{если } p_j < p_i. \end{cases}$$

8.2. Методы решения игр

Будем рассматривать конечные игры с двумя игроками и нулевой суммой. Игрок A располагает m чистыми стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$, а игрок B – соответственно n чистыми стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$. Выбор игроками стратегий (A_i, B_j) приведет к некоторому числовому результату («выигрышу») игрока A, который равен элементу h_{ij} платежной матрицы H. Игра с «нулевой суммой» означает, что при этом «выигрыш» игрока B составит h_{ij}. Поскольку числа h_{ij} могут быть отрицательными, то слово «выигрыш» взято в кавычки. Для каждой строки и каждого столбца платежной матрицы H определим числа

$$\alpha_i = \min_{j=1,2,..,n} h_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; \ \beta_j = \max_{i=1,2,\dots,m} h_{ij}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Эти числа указывают минимально гарантированный выигрыш для игрока A, который применяет стратегию A_i, и минимально гарантированный проигрыш игроком B при использовании стратегии B_j.

Определим два числа

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \propto_i = \max_i \min_j h_{ij}, \beta = \min_{j=1,2,\dots,n} \beta_j = \min_j \max_i h_{ij}.$$

Величина α называется **нижней ценой игры, максиминным** выигрышем, или максимином, соответствующая ей стратегия (строка) – максиминной.

Величина β называется **верхней ценой игры, минимаксным** проигрышем, или минимаксом, соответствующая ей стратегия (столбец) – минимаксной.

Если игрок A выбирает свою максиминную стратегию, то при любой стратегии, выбираемой игроком B, ему обеспечивается выигрыш не менее α. Аналогично для игрока B при выборе им минимаксной стратегии ему обеспечивается проигрыш не более β.

Если $\alpha = \beta$, то игра называется игрой с **седловой точкой,** а общее значение α и β, которое обозначим через v, называется ценой игры. Понятно, что не каждая игра имеет седловую точку.

В игре с седловой точкой оптимальным решением для обоих игроков является выбор максиминной стратегии (для игрока A) и минимаксной (для игрока B) стратегии. Любое отклонение для каждого игрока от этих стратегий не выгодно.

Пример 28 (*определение верхней и нижней цены игры*). Игра состоит в том, что игрок A записывает числа 1 (стратегия A_1), либо 2 (A_2), либо 3 (A_3). Игрок B, в свою очередь, может записать числа 1 (стратегия B_1), 2 (B_2), 3 (B_3) либо 4 (B_4).

Если оба числа окажутся равной четности, то игрок A выигрывает сумму этих чисел, если – разной четности, то B выигрывает сумму этих чисел. Составить платежную матрицу, определить верхнюю и нижнюю цену игры и минимаксные стратегии игроков.

Решение. Согласно условию, платежная матрица для игрока A имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	–3	4	–5	–5
A_2	–3	4	–5	6	–5
A_3	4	–5	6	–7	–7
β_j	4	4	6	6	

Определяем числа α_i и β_j справа и внизу платежной матрицы. Определяем нижнюю и верхнюю цену игры:

$$\alpha = max\{-5, -5, -7\} = -5, \beta = min\{4, 4, 6, 6\} = 4.$$

Следовательно, для игрока A максиминными стратегиями являются A_1 или A_2 при которых ему обеспечен проигрыш не более 5, а для игрока B минимаксными стратегиями являются B_1 или B_2, которые обеспечивают ему проигрыш не более 4. Игра не имеет седловой точки.

Пример 29 (*определение седловой точки*). Пусть у игрока A две стратегии, а у игрока B – три, причем матрица выигрышей для игрока A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти седловую точку матрицы, определить цену игры.

Решение. Определим нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = max\{1;\ -1\} = 1, \beta = min\{\ 3; 1; 6\} = 1.$$

Таким образом, седловой точкой матрицы выигрышей является элемент $h_{12} = 1$, цена игры $v = 1$. Оптимальным решением для игрока A является выбор стратегии A_1, а для игрока B – стратегии B_2. Любое отклонение от этих стратегий для каждого игрока не выгодно.

Отметим, что платежная матрица игры может иметь более одной седловой точки, т. е. возможно не единственное решение игры в чистых стратегиях.

Из решения двух приведенных примеров видим, что не всегда существует седловая точка матрицы выигрышей, а значит, не всегда есть выбор максиминной стратегии или решение матричной игры в чистых стратегиях. Тогда для каждого из игроков становится важным, чтобы соперник не угадал выбора его стратегии. В таком случае используются смешанные стратегии, при которых реализуется схема случайного выбора чистой стратегии.

Смешанной стратегией игрока A называется применение им чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с частотой $x_1, x_2, \dots, x_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Обозначается смешанная стратегия $\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Аналогично вектором $\overline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ определяется смешанная стратегия игрока B, где y_j частота использования стратегии B_j.

Отметим, что чистые стратегии являются частным случаем смешанной стратегии, задаваемой единичным вектором, $\overline{E} =$ $= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Функцией выигрыша, или платежной функцией $f(\overline{X}, \overline{Y})$ игры с матрицей

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

при применении игроком A смешанной стратегии $\overline{X}$, а игроком B – смешанной стратегии Y, называется средняя величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B), определяемая формулой:

$$f(\overline{X}, \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot h_{ij}.$$

Стратегии $\overline{X^*}$ и $\overline{Y^*}$ называются **оптимальными**, если имеют место неравенства

$$f(\overline{X}, \overline{Y^*}) \leq f(\overline{X^*}, \overline{Y^*}) \leq f(\overline{X^*}, \overline{Y}),$$

т. е. если их применение обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем при применении любой другой стратегии $\overline{X}$, и средний проигрыш, не больший, чем при применении им любой другой стратегии $\overline{Y}$.

Совокупность всех оптимальных стратегий $\overline{(X^*, \overline{Y^*})}$ называется **оптимальным решением**, или просто **решением игры,** а значение платежной функции $f(\overline{X^*}, \overline{Y^*})$ – ценой игры v.

Справедлива следующая фундаментальная **теорема** (теорема Неймана). *Любая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.*

В случае если платежная матрица не содержит седловой точки, то определение смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размер матрицы. Поэтому отыскание решения игры обычно начинается с исключения в платежной матрице **заведомо невыгодных** и **дублирующих** стратегий. Определим эти понятия.

Если в платежной матрице $H = (h_{ij})_{m\times n}$ игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока A, не больше соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется **заведомо невыгодной**.

Если в платежной матрице $H = (h_{ij})_{m\times n}$ игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_j игрока B, не меньше соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_j называется **заведомо невыгодной**.

Если в платежной матрице $H = (h_{ij})_{m\times n}$ игры все элементы некоторой строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующие строкам (столбцам) стратегии называются **дублирующими**.

В процессе определения решения игры помимо теоремы Неймана важное значение имеет следующие два утверждения.

Утверждение 1. Любая конечная матричная игра с нулевой суммой размером $m\times n$ имеет решение в смешанных стратегиях, в котором число вошедших стратегий (в том числе чистых) каждого игрока не превосходит $\min(m, n)$.

Отсюда следует, что игра размера $2\times n$ или $m\times 2$ всегда имеет решение в смешанных стратегиях, содержащих не более двух вошедших чистых стратегий каждого из игроков.

Утверждение 2. Если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе чистые стратегии).

Рассмотрим применение этих утверждений.

Пример 30 (*определение оптимальных пропорций сбыта продукции*). Магазин может завести в различных пропорциях товары двух типов (A_1, A_2). Прибыль магазина зависит от вида товара и состояния спроса. Последний характеризуется тремя состояниями (B_1, B_2, B_3). Определить оптимальные пропорции завоза товаров в магазин из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	**20**	**15**	**10**	10
A_2	**16**	**12**	**14**	12
β_j	20	15	14	

Решение. Прежде всего, проверяем наличие седловой точки игры. Определяем $\alpha = \max\{10;\ 12\} = 12, \beta = \min\{\ 20; 15; 14\} = 14$. Следовательно, $\alpha \neq \beta$ и седловой точки нет.

Перейдем к определению оптимальной смешанной стратегии для магазина. В начале исследуем платежную матрицу с целью исключения заведомо невыгодных и дублирующих стратегий. Стратегия B_1 – заведомо невыгодная. Из платежной матрицы исключаем столбец B_1.

Пусть смешанная стратегия игрока A задается вектором $\overline{X} = (x_1, x_2)$ и цена игры есть v. Тогда на основании утверждения 2 при применении чистых стратегий B_2, B_3 имеем следующие равенства

$$15 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = v \text{ (при стратегии } B_2\text{)};$$
$$10 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 = v \text{ (при стратегии } B_3\text{)};$$
$$x_1 + x_2 = 1 \text{ (уравнение частот)}.$$

В результате имеем систему трех линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных x_1, x_2, v. Вычитая из первого уравнения второе, получим систему двух уравнений относительно двух неизвестных x_1, x_2.

$$5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 1\ .$$

Решением этой системы является $x_1 = \frac{4}{9}, x_2 = \frac{5}{9}$, оптимальные пропорции завоза товаров в магазин – $\overline{X} = (^4/_9\,;\ ^5/_9)$.

Средняя гарантированная прибыль магазина – $v = 13\frac{1}{3}$.

8.3. Сведение решения матричной игры к задаче линейного программирования

Рассмотрим игру двух партнеров-соперников A и B, имеющих в своем распоряжении соответственно $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ стратегий. Платежная матрица H имеет вид:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="5">Стратегии игрока B</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td></td><td>B_j</td><td></td><td>B_n</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Стратегии игрока A</td><td>A_1</td><td>h_{11}</td><td>……</td><td>h_{1j}</td><td></td><td>h_{1n}</td></tr>
<tr><td></td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>A_i</td><td>h_{i1}</td><td>…..</td><td>h_{ij}</td><td>…..</td><td>h_{in}</td></tr>
<tr><td></td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>…..</td><td>…..</td></tr>
<tr><td>A_m</td><td>h_{m1}</td><td>…..</td><td>h_{mj}</td><td>….</td><td>h_{mn}</td></tr>
</table>

Будем считать, что все элементы матрицы H неотрицательны, в противном случае ко всем элементам матрицы можно добавить некоторое достаточно большое положительное число h_0, переводящее платежи игры в область неотрицательных значений. При этом цена игры увеличится на h_0, ее можно считать положительной, а решение игры не изменится.

Полагаем, что платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях:

$$\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*), \overline{Y^*} = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

Оказывается, что оптимальные решения $\overline{X^*}$ и $\overline{Y^*}$ могут быть определены путем решения следующей симметричной пары двойственных задач линейного программирования:

$$min\{\, T = x_1' + x_2' + \dots + x_m'\},$$

при условиях

$$h_{11} \cdot x_1' + h_{21} \cdot x_2' + \dots + h_{m1} \cdot x_m' \geq 1;$$
$$h_{12} \cdot x_1' + h_{22} \cdot x_2' + \dots + h_{m2} \cdot x_m' \geq 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.....$$
$$h_{1n} \cdot x_1' + h_{2n} \cdot x_2' + \dots + h_{mn} \cdot x_m' \geq 1;$$
$$x_i' \geq 0, i = 1, 2, \dots, m;$$
$$max\{\, z = y_1' + y_2' + \dots + y_n'\};$$

при условиях

$$h_{11} \cdot y_1' + h_{12} \cdot y_2' + \dots + h_{1n} \cdot y_n' \leq 1;$$
$$h_{21} \cdot y_1' + h_{22} \cdot y_2' + \dots + h_{2n} \cdot y_n' \leq 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.....$$
$$h_{m1} \cdot y_1' + h_{m2} \cdot y_2' + \dots + h_{mn} \cdot y_n' \leq 1;$$
$$y_j' \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Решив эти задачи, найдем цену v игры и оптимальные смешанные стратегии $\overline{X^*}, \overline{Y^*}$ из соотношений

$$v = \frac{1}{T_{min}} = \frac{1}{z_{max}}, x_i^* = v \cdot x_i', y_j^* = v \cdot y_j', i = 1, 2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n.$$

Пример 31 (*определение оптимальных пропорций выпуска продукции*). Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2, A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос в свою очередь может принимать одно из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). В следующей матрице $H = (h_{ij})_{3\times 4}$ элементы h_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции и j-м состоянии спроса:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Решение. Эту задачу можно рассматривать как игру двух соперников A и B, имеющих в своем распоряжении соответственно 3 и 4 стратегий с платежной матрицей H.

Проверяем наличие седловой точки игры. Определяем

$$\alpha = max\{2;\ 4; 1\} = 4, \beta = min\{\ 8; 7; 6; 7\} = 6.$$

Следовательно, $\alpha \neq \beta$ и седловой точки в матрице нет. Игра решается в смешанных стратегиях.

Для решения данной задачи определим оптимальную стратегию игрока A путем решения задачи линейного программирования:

$$min\{\ T =\ x_1' + x_2' + x_3'\},$$

при условиях

$$8 \cdot x_1' + 4 \cdot x_2' + 1 \cdot x_3' \geq 1,$$
$$3 \cdot x_1' + 5 \cdot x_2' + 7 \cdot x_3' \geq 1,$$
$$6 \cdot x_1' + 6 \cdot x_2' + 4 \cdot x_3' \geq 1,$$
$$2 \cdot x_1' + 5 \cdot x_2' + 7 \cdot x_3' \geq 1,$$
$$x_i' \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Для определения решения этой задачи воспользуемся надстройкой «Поиск решения» в среде *Excel* (рабочий лист *Excel* показан на рис. 32).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		8	3	6	2		x1	0,031		0,143	
3		4	5	6	5		x2	0,188		0,857	
4		1	7	4	7		x3	0,000		0,000	
5		1	1	1,3	1		T	0,219	V=	4,57	
6		1	1	1	1						
7											
8											

Рисунок 32. Результаты решения

Этот рисунок показывает оптимальную смешанную стратегию игрока A, $\overline{X^*} = (0,143;\ 0,857;\ 0)$ и цену игры $v = 4,57$.

Оптимальные пропорции в выпускаемой продукции предприятия:

1) продукция вида A_1 составляет 14,3 % от общего объема выпуска;
2) продукция вида A_2 составляет 85,7 % от общего объема выпуска;
3) продукцию вида A_3 выпускать не целесообразно.

Средняя величина прибыли равна 4,57.

9. МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

9.1. Описание модели системы массового обслуживания (СМО)

Всякая СМО может быть представлена некоторой совокупностью однородных устройств, в дальнейшем называемых каналами или приборами (это могут быть и люди, и бригады, если они целиком обслуживают одну заявку), и требований (заявок), нуждающихся в обслуживании. Для СМО характерно, что моменты появления заявок и продолжительность обслуживания каждой из них есть величины случайные.

СМО включает в себя следующие обязательные элементы: *1) входящие заявки; 2) обслуживающие устройства – каналы; 3) обслуживание – процесс удовлетворения заявок; 4) выходящие заявки, как обслуженные, так и необслуженные.* Кроме того, в СМО некоторых видов в качестве элемента выступает *очередь* – заявки, поступившие в систему при занятых каналах и ожидающие начала обслуживания.

Все СМО делится на два основных вида. *Одноканальные*, которые содержат один канал, обслуживающий поступающие заявки. Примерами таких систем может служить контрольная служба с единственным контролером, нижний склад леспромхоза с одной разгрузочной площадкой. *Многоканальные* системы содержат более одного канала.

В каждом из перечисленных видов различают два основных типа СМО: 1) *с отказом* (выбыванием) и 2) с *ожиданием*. В системах с отказами заявки, поступившие в систему при занятых каналах, получают отказ, выбывают из системы необслуженными и при дальнейшем функционировании системы не учитываются. В СМО с ожиданием заявка, поступившая в систему, если канал занят, не получает отказа, а становится в очередь и обслуживается при освобождении канала. Такие системы наиболее распространены на практике, поэтому теорию массового обслуживания называют теорией очередей.

По характеру ожидания СМО делятся на две большие группы: *с неограниченным временем ожидания* и *с ограниченным*. Для первой группы СМО заявка пребывает в очереди (в системе) до тех пор, пока не будет обслужена, как бы долго не продолжалось ожидание. Для второй группы СМО заявка после определенного срока пребывания в очереди выбывает из системы необслуженной. Заметим, что СМО с ограниченным с точки зрения их принадлежности к тому или иному типу временем ожидания являются смешанными, поскольку они – СМО *с ожиданием* и в то же время – *с отказами*.

По регламенту обслуживания СМО делится на три группы: 1) группа СМО *со случайным обслуживанием*: при освобождении очередного канала из очереди случайным образом выбирается любая заявка из числа ожидающих обслуживания (предполагается равнозначность всех заявок); 2) группа СМО *с упорядоченным обслуживанием*: заявки выбираются из очереди в порядке поступления (заявка, которая поступила раньше и дольше находится в очереди, обслуживается первой); 3) группа СМО *с приоритетным обслуживанием*: первыми выбираются из очереди при освобождении канала те заявки, которые имеют больший приоритет.

По характеру функционирования различают *разомкнутые* и *замкнутые* СМО. К первым относят такие, где количество заявок неограниченно и не зависит от состояний самой системы, ко второй – такие, где общее число заявок ограничено, и возможности поступления новых зависит от того, сколько заявок уже находится в системе.

Математическим аппаратом, который используется для описания и анализа функционирования СМО, является теория вероятностей. Однако, когда встает вопрос об обосновании оптимальных параметров систем с позиций эффективности их работы организационно-экономических формирований, то, кроме формального описания, необходимо ясное понимание роли и места конкретной СМО во всем комплексе, составляющем производственную систему. Поэтому одного знания теории вероятностей и умения им пользоваться оказывается недостаточно.

9.2. Функционирование СМО

Все основные показатели функционирования СМО зависят в основном от типа системы, количества каналов, характеристик входящих заявок и характеристик работоспособности самих каналов. Ознакомимся с этим более подробно.

Число каналов. В теории массового обслуживания принимается допущение о том, что каждый из n (n – натуральное число) каналов обслуживает заявку от начала до конца, передача одной и той же заявки от канала к каналу в процессе обслуживания не предусматривается.

Поток заявок. Появление каждой заявки является случайным событием, описывать и изучать каждую из них сложно и нецелесообразно. Лучше рассматривать всю совокупность заявок в целом. Принято говорить о *потоке заявок*, под которым понимается последовательность во времени событий, заключающихся в появлении заявок. Эта последовательность характеризуется моментами времени появления событий. Если интервалы времени между появлениями двух последовательных событий одинаковы, то имеет место *регулярный поток*. В таком потоке моменты появления событий связаны между собой жесткой связью и описывать каждое из них можно только в функциональной зависимости со всеми остальными. Это затрудняет анализ явлений, в которых участвует много событий. Поэтому предполагается, что события появляются независимо друг от друга в случайные моменты времени – *нерегулярные потоки*.

В СМО предполагается невозможность одновременного появления нескольких событий (*свойство ординарности*). Кроме того, имеет место *свойство последействия*, которое можно пояснить следующим образом. Если на оси времени выделить отрезок длиной τ с началом в точке t, то отсутствие последействия определяется тем, что вероятность появления на отрезке τ того или иного количества событий и моменты их появления не зависят от того как распределены на оси времени другие события вне этого интервала.

Нерегулярный, ординарный поток без последействия обычно принято называть *пуассоновским*. Для пуассоновского потока вероятность того, что за интервал τ появится ровно m событий, определяется зависимостью

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где a – среднее количество событий, приходящихся на интервал τ.

Отсюда получаем вероятность того, что за интервал времени τ не появится ни одного события ($m=0$)

$$p_0 = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a}$$

и появится хотя бы одно событие (поступит хотя бы одна заявка)

$$R_1 = 1 - p_0 = 1 - e^{-a}.$$

Вводится понятие средней плотности потока λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Плотность потока может быть постоянной $\lambda = const$ (поток называется *стационарным, или простейшим*), так и переменной $\lambda(t)$ – *нестационарный* поток. Для стационарного потока выполняется равенство $a = \lambda\tau$, поэтому основная характеристика входящего потока заявок – средняя плотность потока λ .

Продолжительность обслуживания одной заявки одним каналом. Это величина $t_{обсл}$ случайная, поэтому необходимо знать закон ее распределения. Принято использовать показательный закон распределения времени обслуживания одной заявки: $F(t) = p(t_{обсл} < t) = 1 - e^{-\mu t}$, где $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$, а $\bar{t}_{обсл}$ – средняя продолжительность обслуживания одной заявки одним каналом.

Таким образом, функционирование СМО определяется тремя параметрами: числом каналов в системе n; средней плотностью потока заявок λ; средней продолжительностью обслуживания каналом одной заявки $\bar{t}_{обсл}$. Для получения информации о двух последних параметрах чаще всего приходится обращаться к сбору и обработке соответствующих статистических данных.

Кроме указанных, для замкнутых СМО характеристикой является еще общее число заявок, которое в принципе может поступить в систему m.

Применительно к системам с отказами наиболее общей характеристикой является вероятность p_n того, что обслуживанием заняты все n каналов системы. Этот показатель эквивалентен вероятности того, что вновь поступившая заявка получает отказ в обслуживании $p_{отк}$ и выбывает из системы $p_{отк} = p_n$. Для систем с отказами важны также характеристики: p_0 – вероятность того, что все каналы системы свободны; p_k – вероятность того, что из n имеющихся каналов k заняты.

Используя эти величины, можно определить другие характеристики. $N_з$ – среднее число занятых каналов как математическое ожидание числа каналов, занятых обслуживанием:

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} k p_k ,$$

N_0 – среднее число свободных (не занятых) каналов:

$$N_0 = n - N_з = \sum_{k=1}^{n} (n-k) p_k ,$$

$K_з, K_0$ – коэффициент занятости и простоя каналов:

$$K_з = \frac{N_з}{n};$$

$$K_0 = \frac{N_0}{n} = 1 - K_з.$$

Для СМО с ожиданием кроме уже перечисленных характеристик важную роль играют следующие: $M_{ож}$ – средняя длина очереди как математическое ожидание числа заявок, уже поступивших в систему и ожидающих обслуживания:

$$M_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k \quad \text{при } k>n;$$

M – среднее число заявок в системе, обслуживаемых и ожидающих обслуживания:

$$M = M_{ож} + N_з = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k + \sum_{k=1}^{n}kp_k.$$

9.3. Модели функционирования СМО

Одноканальная СМО с отказами. Рассмотрим простейшую СМО – одноканальную с отказами. В нее поступает поток заявок с плотностью λ. Если в момент поступления заявки канал свободен, заявка принимается на обслуживание, если занят – заявка получает отказ и выбывает из системы. В любой момент времени рассматриваемая система может находиться только в одном из двух состояний: A_0 – канал свободен, вероятность этого $p_0(t)$; A_1 – канал занят, вероятность пребывания системы в таком состоянии $p_1(t)$. Поскольку события A_0, A_1 представляют собой полную группу событий, то для любого момента времени t выполняется равенство

$$p_0(t) + p_1(t) = 1.$$

Найдем вероятность того, что система будет свободна в момент времени $t + \Delta t$, она может быть свободна по двум причинам.

1. Канал был свободен в момент t и за время Δt не поступило ни одной заявки. Вероятность такого события $p_0^1(t+\Delta t) = p_0(t)p_0(\Delta t)$. В соответствии с распределением Пуассона

$$p_0(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda \Delta t}.$$

При малых значениях Δt величина $e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$, поэтому

$$p_0^1(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t).$$

2. В момент t канал занят, но за время Δt освобождается. Соответствующая вероятность

$$p_0^2(t + \Delta t) = p_1(t) F(\Delta t),$$

где $F(\Delta t) = p(t_{обсл} < \Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$.

Для вероятности, определяемой второй причиной, получаем

$$p_0^2(t + \Delta t) = p_1(t) \mu \Delta t.$$

В результате вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ канал свободен (независимо от причин, приведших к этому), равна

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + p_1(t) \mu \Delta t.$$

Выполняя необходимые преобразования и учитывая соотношение $p_1(t) = 1 - p_0(t)$, имеем

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu) p_0(t) + \mu.$$

Устремляя здесь Δt к нулю и переходя к пределу, получаем дифференциальное уравнение, определяющее состояние системы в любой момент времени

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) p_0(t) + \mu.$$

Это искомая модель функционирования простейшей СМО. Решение этого уравнения имеет вид

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu) t}.$$

В начальный момент t=0 система всегда свободна, поскольку $p_0(0) = 1$.

С увеличением времени величина $e^{-(\lambda+\mu)t}$ стремится к нулю, а значит при $t \to \infty$ получаем $p_0 = \mu/(\lambda+\mu)$, т.е. после определенного периода времени вероятность $p_0(t)$ можно считать постоянной, принято называть временем установившегося процесса, а сам процесс – установившимся. Следовательно, вместо дифференциальных уравнений имеем дело с обычными алгебраическими уравнениями, что упрощает вычисления при анализе СМО.

Многоканальные системы с отказами. Формальное построение модели функционирования системы сводится к рассмотрению всех возможных ее $n + 1$ состояний:

A_0 – все каналы системы свободны, соответствующая вероятность обозначается $p_0(t)$;

A_1 – занят один канал, а остальные свободны, вероятность $p_1(t)$;

………………………………………………………………………..

A_k – заняты k каналов, а остальные $n–k$ свободны, вероятность такого состояния $p_k(t)$;

………………………………………………………………………..

A_n – все n каналов заняты, свободных нет, вероятность $p_n(t)$.

Очевидно, что перечисленные события составляют полную группу, для любого момента времени выполняется нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1.$$

Рассуждая как в предыдущем случае, можно построить систему дифференциальных уравнений для $p_0, p_1, ..., p_n$. Поскольку мы рассматриваем только устоявшийся процесс, то $\frac{dp_k}{dt} = 0, k = 0,1,..., n.$ Получим систему алгебраических уравнений относительно искомых вероятностей:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

$$\lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0;$$

……………………………………………

$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0 .$$

Решая эту систему относительно неизвестных $p_0, p_1, ..., p_n$, находим

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}, \quad k = 0,1,...,n ,$$

где $\alpha = \lambda / \mu$.

Из этих выражений получаем:

$$p_k = p_0 \frac{\alpha^k}{k!}, \quad k = 1,2,..., n; \qquad p_0 = (1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + ... + \frac{\alpha^k}{k!} + ... + \frac{\alpha^n}{n})^{-1} .$$

Эти выражения носят название формул Эрланга. С их помощью можно определить все остальные показатели функционирования для любых СМО с отказами. Например, вероятность получить отказ $p_{отк} = p_n = \dfrac{\alpha^n}{n!} p_0$, вероятность обслуживания $p_{обсл} = 1 - p_{отк}$; среднее число каналов, занятых обслуживанием, $N_з = \sum\limits_{k=1}^{n} k p_k = p_0 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha^k}{(k-1)!}$ и т.д.

Разомкнутые многоканальные СМО с ожиданием. Это наиболее распространенный тип систем, их исследование имеет важное значение для практики. Вначале рассмотрим системы с неограниченным временем ожидания. Количество заявок можно считать неограниченным, заявка не уходит из системы пока не будет обслужена. Режим обслуживания – случайный, при освобождении канала заявка выбирается из очереди случайным способом.

При составлении модели функционирования системы рассматривают всевозможные состояния:

A_0 – все каналы системы свободны, соответствующая вероятность обозначается $p_0(t)$;

A_1 – занят один канал, а остальные свободны, вероятность $p_1(t)$;

…………………………………………………………………………..

A_l – заняты k каналов, а остальные $n–l$ свободны, вероятность такого состояния $p_l(t)$;

……………………………………………………………………………..

A_n – все n каналов заняты, свободных нет, очереди нет, вероятность $p_n(t)$;

……………………………………………………………………………

A_k – все n каналов заняты, свободных нет, в очереди $k–n$ заявок, вероятность $p_k(t)$.

Заметим, что если количество занятых каналов не превышает их общего числа ($l < n$), то для вероятностей возможных состояний системы имеют место формулы Эрланга и вероятность p_0, что все каналы свободны, определится формулой

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha}{n!(1 - \frac{\alpha}{n})} \right]^{-1} \text{ при } \frac{\alpha}{n} < 1;$$

Вероятность того, что заняты l каналов (в системе l заявок) p_l

$$p_l = \frac{\alpha^l}{l!} p_0 \quad \text{для} \quad 1 \le l \le n.$$

Для случая $k > n$ величина p_k определяется формулой:

$$p_k = \frac{\alpha^n}{n! n^{k-n}} p_0;$$

вероятность того, что заняты все n каналов π_n:

$$\pi_n = \frac{\alpha^n}{n!(1 - \frac{\alpha}{n})} p_0 \text{ при } \alpha/n < 1;$$

вероятность того, что все каналы заняты, а в системе (в очереди) находится еще s заявок

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0;$$

среднее время пребывания заявки в очереди ожидания начала обслуживания $t_{ож}$:

$$t_{ож} = \frac{p_n t_{обсл}}{n-\alpha} \text{ при } \alpha/n < 1;$$

средняя длина очереди (математическое ожидание числа заявок, находящихся в очереди) $M_{ож}$:

$$M_{ож} = \frac{\alpha \pi_n}{n(1+\frac{\alpha}{n})^2} \text{ при } \alpha/n < 1;$$

среднее число свободных (незанятых) каналов N_0:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{\alpha^k}{k!} p_0.$$

Зная эти величины, можно рассчитать значения коэффициентов занятости и простоя каналов.

Замкнутые многоканальные СМО с ожиданием. В этом случае количество заявок не может превосходить некоторой величины m. Больше m заявок в систему в принципе поступить не может, при этом $m>n$. Кроме того, единожды обслуженные заявки могут спустя некоторое время вновь вернуться и потребовать обслуживания.

В установившемся режиме работы для таких систем можно получить систему линейных алгебраических уравнений:

$$-m\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

…………………………………………………….

$$(m-k+1)\lambda p_{k-1} - [(m-k)\lambda + k\mu] p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \text{ при } 0 \le k \le n;$$

……………………………………………………………………………….

$$(m-k+1)\lambda p_{k-1} - [(m-k)\lambda + n\mu] p_k + n\mu p_{k+1} = 0 \text{ при } n < k \le m;$$

………………………………………………………………………………

$$-\lambda p_{m-1} + n\mu p_m = 0.$$

Сохраняется и обычное нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1.$$

Эти уравнения отличаются от всех предыдущих наличием в каждом из них величины *m*, учитывающей возможности количества заявок.

Решение системы дает следующие результаты.

Вероятность, что все каналы свободны p_0 :

$$p_0 = [\sum_{k=0}^{n} \frac{m!\alpha^k}{k!(m-k)!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!}]^{-1};$$

Для $k < n$ очереди в системе нет и она функционирует как любая другая система до образования очереди.

Вероятность, что в системе находится $k > n$ заявок, *n* из них обслуживаются, а *k-n* стоят в очереди p_k:

$$p_k = \frac{m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} p_0 \text{ для } n \le k \le m.$$

Среднее число заявок в очереди $M_{ож}$

$$M_{ож} = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) p_k = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} p_0.$$

Среднее число свободных каналов

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)m!\alpha^k}{k!(m-k)!}.$$

Зная величину N_0, можно определить коэффициент занятости и простоя каналов, а также коэффициент простоя заявок в ожидании обслуживания

$$K_{оз} = \frac{M_{ож}}{m}.$$

9.4. Экономическая эффективность СМО

Оптимизация многоканальных СМО с отказами. Для таких систем можно ставить вопрос об экономическом обосновании целесообразного (оптимального) числа каналов. С этой целью строят критерий экономической эффективности $F(n)$ и рассчитывают такое n, которое придает экстремальное значение этой функции. Характер и форма критерия зависят от того, какая конкретная система рассматривается. В качестве примера рассмотрим определение оптимального числа каналов для системы выборочного контроля качества продукции.

Пример 32 (*определение оптимального числа контролеров*). Содержательная постановка задачи состоит в следующем. Если изделие после сборки не подвергалось контрольному осмотру (все каналы были заняты и заявка получила отказ), оно поступает на склад готовой продукции и оттуда направляется потребителю. Среди изделий, не проходивших контроль, могут оказаться и изделия с дефектом и браком. За отправку потребителю некачественной продукции предприятие штрафуется и, кроме того, несет дополнительные расходы, связанные с доставкой бракованных изделий от потребителей, устранением дефектов и доставкой их обратно потребителям. Чем больше в системе контролеров, тем выше вероятность обслуживания заявок и меньше возможность пропуска изделий с браком, но тем больше и издержки предприятия на содержание самой контрольной службы. Выберем в качестве критерия величину суммарных затрат предприятия на содержание контрольной службы и издержек, связанных со своевременным не выявленным браком. Определим число каналов, которое обращает такой критерий в минимум.

Решение. Общие издержки предприятия определяются следующей формулой:

$$F(n) = (nЗ_k + \lambda k_б З_б p_n)T,$$

где n – число каналов в системе (контролеров); $З_k$ – затраты на содержание одного контролера в единицу времени; $k_б$ – средний коэффициент брака, среднее относительное количество бракованных изделий, характерное для данного производства или данного предприятия; $З_б$ – средние суммарные затраты предприятия, связанные с пропуском брака в изделиях; T – множитель, который изменяет только общую величину издержек, но не влияет на характер изменения критерия.

Первое слагаемое функции $F(n)$ возрастает с ростом числа каналов n, а второе достаточно быстро и нелинейно падает в соответствии с поведением величины p_n, стремясь к нулю. Сумма таких двух слагаемых всегда имеет минимум, который отвечает оптимальному числу каналов.

Для наглядности поведения функции $F(n)$ можно выполнить графическое изображение, задавая ряд значений $n = 0, 1, 2$ и т.д. Далее из таблицы значений функции и графика ее поведения определить оптимальное число каналов.

Оптимизация разомкнутой многоканальной СМО. Знание характеристик функционирования позволяет ставить вопрос об оптимизации числа каналов в системе. Решим его применительно к определению числа станков, обрабатывающих одинаковые детали. При этом полагаем, что каждый станок обслуживается одним рабочим. В качестве критерия принимается величина издержек предприятия, вызываемых несоответствием числа станков и их производительности темпу поступления деталей с предшествующих операций. Эти издержки складываются из следующих составляющих.

1. Расходы на оплату простаивающих каналов. В частности, это часть зарплаты рабочих (при повременной оплате труда), которая расходуется в течение времени, пока оборудование простаивает в ожидании заявок, и амортизация основных фондов.

$$F_1(n) = nc_p K_0 T,$$

где c_p – затраты на один станок в единицу времени.

2. Затраты на создание и содержание дополнительных производственных площадей, на которых хранятся детали, находящиеся в очереди на обслуживание.

$$F_2(n) = (M_{ож}\sigma_N - S_H)c_П T,$$

где σ_N – норма площади для размещения (хранения) деталей, величина определяется с учетом того, что детали могут складываться одна на другую, например мебельные щиты; S_H – площадь, необходимая в стандартных случаях; $c_П$ – затраты на единицу площади в единицу времени.

3. Потери, что подготовленные детали фактически не обрабатываются. Сюда же следует отнести потери от увеличения объемов незавершенного производства и т.п.

$$F_3(n) = c_{ож} M_{ож} T,$$

где $c_{ож}$ – потери от простоя в ожидании обработки одной детали в единицу времени.

Общие издержки предприятия за некоторый период времени T составляют

$$F(n) = [nc_p K_0 + M_{ож}(\sigma_N c_П + c_{ож}) - S_H c_П]T.$$

Оптимальное число каналов определяется прямыми расчетами критерия $F(n)$ при варьировании значений n.

Оптимизация замкнутой многоканальной СМО с ожиданием. Рассмотрим это на примере определения оптимальной численности ремонтных рабочих. Все ремонтные работы по своему характеру разделяются на две категории – плановые и неплановые. Потребность в неплановых работах возникает в случайные моменты времени, объемы работ заранее неизвестны и также носят случайный характер. Эти работы можно считать случайными в статистическом понимании этого термина. Они занимают достаточно большую долю (около 68%) в общем объеме работ групп технического обслуживания.

Таким образом, в группу технического обслуживания поступает два потока заявок – детерминированный и случайный. Суммарный поток является случайным. Случайна и продолжительность работ по неплановым заявкам, поэтому деятельность группы технического обслуживания можно рассматривать как СМО, в частности с помощью моделей многоканальных СМО с неограниченным временем ожидания.

Число рабочих n_p в такой системе в общем случае не равно числу каналов n, определяется соотношением:

$$n_p = \chi n, \tag{49}$$

где χ – среднее число рабочих, выполняющих ремонт по одной заявке. Эта величина различна для разных типов производств и состава технологического оборудования, определяется на основании статистических данных.

Издержки на содержание ремонтной службы складываются из заработной платы рабочих, затрат на содержание и амортизацию производственных помещений, на приобретение и содержание оборудования и инструментов, запасных частей, необходимых для ремонта, и т.п. На один канал придется всего затрат:

$$F_1(n) = \chi З_p + \chi S_p = (1 + \frac{S_p}{З_p})\chi З_p,$$

где $З_p$ – заработная плата одного рабочего в единицу времени; S_p – остальные затраты на одного рабочего.

Если $\frac{S_p}{З_p}$ выразить в процентах и обозначить через k_p, то общие издержки предприятия на содержание группы технического обслуживание составят

$$F_0(n) = (1 + \frac{k_p}{100})\chi\, n\, З_p.$$

Потери от простоя оборудования определяются умножением количества M простаивающего технологического оборудования (в ремонте или в ожидании ремонта) на $c_{пр}$ – средние потери предприятия в единицу времени от простоя единицы оборудования. Полные издержки предприятия за период времени T определяются выражением:

$$F_П(n) = [(1 + \frac{k_p}{100})\chi\, n\, З_p + Mc_{пр}]T,$$

где

$$M = M_{ож} + N_з = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)m!\alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m!\alpha^k}{k!(m-k)!} p_0,$$

где $N_з$ – количество обслуживаемых заявок.

Нахождение минимума критерия выполняется путем прямых расчетов значений $F_П$ при задании ряда значений n.

Прикладные задачи производственной логистики. Пример 33 (*определение оптимального количества ремонтных рабочих*). В цехе деревообрабатывающего предприятия необходимость ремонта, наладки или переналадки оборудования характеризуется простейшим потоком событий с плотностью $\lambda =$ 0,0125 ед./ч. Требуется определить количество ремонтных рабочих, которое обеспечит выполнение производственной программы, если на предприятии пятидневная рабочая неделя в две смены по 8 часов.

Решение. Количество рабочих часов в неделю равно $\tau = 5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$ ч. По формулам п. 9.2 определяем величины $p_0, p_1, p_m, m = 1, 2, ..., 5$.

Для этого вычислим параметр $\alpha = \lambda\tau = 0{,}0125 \cdot 80 = 1$. В результате имеем:

$$p_0 = e^{-1} = 0{,}368;\ R_1 = 1 - p_0 = 1 - e^{-1} = 0{,}632;$$

$$p_1 = \frac{1^1}{1!} = e^{-1} = 0{,}368;\ p_2 = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 0{,}184;$$

$$p_3 = \frac{1^3}{3!}e^{-1} = 0{,}061;\ p_4 = \frac{1^4}{4!}e^{-1} = 0{,}015;$$

$$p_5 = \frac{1^5}{5!}e^{-1} = 0{,}003.$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Вероятность, что в течение недели будут поступать одна или две заявки составляет 0,368 + 0,184 = 0,552. Это означает, что в каждую вторую неделю можно ожидать одну или две заявки на выполнение ремонтных работ.

Вероятность того, что поступит более двух заявок, составит

$$1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

Следовательно, более двух заявок в среднем будут поступать только в восьми неделях из 100, т.е. не более чем четыре недели в году. Значит, если ремонт, наладку или переналадку оборудования осуществляет один рабочий, то всего рабочих должно быть два.

Пример 34 (*снижение количества брака продукции*). Со сборочной линии предприятия в течение смены (8 ч) сходит в среднем 320 изделий. Контролер затрачивает на осмотр одного изделия в среднем 3 мин. Затраты на содержание контролера – 264 у.е. в месяц (при 22 рабочих днях). Издержки предприятия, вызванные несвоевременно выявленным браком, составляют 182 у.е. за одно изделие. Средний коэффициент брака на предприятии – не более 0,2 % от объема выпускаемой продукции. Требуется найти оптимальное число контролеров (оптимальное число каналов в СМО).

Решение. На основании исходных данных определим параметры многоканальной СМО с отказами:

$$\lambda = 320/8 = 40 \text{ ед./ч}; \; t_{обсл} = 3/60 = 0,05 \text{ ч};$$

$$\mu = 1/t_{обсл} = 1/0,05 = 20; \; \alpha = 40/20 = 2.$$

Общие издержки предприятия определяются формулой

$$F(n) = (nЗ_k + \lambda k_б З_б p_n)T,$$

где $З_k = \dfrac{264}{22 \cdot 8} = 1,5 \, у.е.$ – затраты на содержание одного контролера в час; $k_б = 0,002$ – средний коэффициент брака, среднее относительное количество бракованных изделий; $З_б = 182$ у.е. – средние суммарные затраты предприятия, связанные с пропуском брака в изделиях; $p_n = p_0 \dfrac{\alpha^n}{n!}$; $p_0 = (1 + \dfrac{\alpha}{1!} + \dfrac{\alpha^2}{2!} + ... + \dfrac{\alpha^k}{k!} + ... + \dfrac{\alpha^n}{n})^{-1}$; $T = 8$ ч.

Зададим ряд значений n = 0, 1, 2, …, 7 и составим таблицу значений критерия экономической эффективности, работы системы контроля качества продукции.

n	p_n	$F(n)$
0	1	116,48
1	0,667	89,69
2	0,4	70,59
3	0,211	60,58
4	0,0952	59,09
5	0,0367	64,27
6	0,0121	73,41
7	0,0034	84,40

Из этой таблицы следует, что оптимальное число контролеров равно 4, поскольку при таком их количестве издержки предприятия минимальны.

10. МЕТОДЫ ABC- И XYZ-АНАЛИЗА В ЛОГИСТИКЕ

10.1. Метод ABC-анализа

Данный метод связан с широко распространенным в экономике явлением, известным как правило «80/20», которое впервые открыл и обосновал итальянский экономист Вильфредо Парето (1897 г.). Указанное правило также называется закон, или принцип, Парето.

Применительно к логистике правило «80/20» интерпретируется следующим образом:

1) 80 % грузов по стоимости произведенных в год закупок предприятием составляют около 20 % всей номенклатуры;
2) 80 % стоимости товара определяется 20 % входящих в него компонентов;
3) 80 % дневного объема продукции производится за 20 % времени;
4) 80 % стоимости запасов дают 20 % наименований хранимых на складе запасов.

Суть **метода ABC** состоит в том, что в соответствии с целью анализа структуры МП выбирается классификационный признак. Объекты в МП ранжируются в порядке убывания этого классификационного признака. Например, при классификации входящих материальных потоков по объему произведенных в год закупок вся номенклатура приобретаемых видов сырья и материалов располагается в порядке убывания стоимости их годового потребления. Затем в **группу А** относят все наименования в списке, начиная с первого, сумма стоимостей которых составляет 75–80 % от суммарной стоимости всех потребленных за год материальных ресурсов. Опыт показывает, что обычно в эту группу попадает 10–20 % всей номенклатуры.

К **группе В** относится примерно треть (около 30 %) наименований объектов (ресурсов), сумма стоимостей которых составляет 10–15 %.

Остальные позиции номенклатуры (оставшаяся половина объектов (ресурсов) ~ 50 %), суммарная стоимость которых составляет лишь 5–10 %, относятся к **группе С**.

Таким образом, вся номенклатура закупок поступающих на предприятие делится на три группы: **А, В, С**. Естественно, начинать наводить порядок нужно с самой немногочисленной по количеству, но значительной по стоимости группы А.

Исходной информацией метода являются результаты деятельности предприятия (фирмы), канала распределения и других за предыдущий период (год, квартал и т.д.). Реализацию метода можно представить в виде следующих шагов.

Шаг 1. Определить объекты анализа: клиент, поставщик, товарная группа/подгруппа, номенклатурная (ассортиментная) единица, и т.п.

Шаг 2. Определить параметр, по которому будет проводиться анализ объекта: средний товарный запас, руб.; объем продаж, руб.; доход, руб.; количество единиц продаж, шт.; количество заказов, шт. и т.п.

Шаг 3. Сортировка объектов анализа в порядке убывания значения параметра.

Шаг 4. Расчет величин: а) доли параметра от общей суммы параметров выбранных объектов; б) доли пункта а) с накопительным итогом.

Шаг 5. Определение групп А, В и С.

Группа А – объекты, сумма долей с накопительным итогом которых составляет более 50 % от общей суммы параметров.

Группа В – следующие за группой А объекты, сумма долей с накопительным итогом которых составляет от 50 до 80 % от общей суммы параметров.

Группа С – оставшиеся объекты, сумма долей с накопительным итогом которых составляет от 80 до 100 % от общей суммы параметров.

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 35 (*АВС-анализ в распределительной логистике*). Провести АВС анализ клиентов торговой фирмы. Исходная информация дана в миллионах руб.

Покупатель	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март
1	2	3	4
1	4560	4370	4390
2	2300	4578	5600
3	400	320	540
4	100	234	523
5	12	45	34
6	456	346	467
7	3789	2700	3600
8	2100	457	578

Окончание табл.

1	2	3	4
9	3400	4100	4572
10	134	543	643
11	267	320	987
12	200	236	875
13	463	562	540
14	1367	987	1124
15	598	659	765
Всего продаж	20 146	20 457	25 238

Решение. Проведем анализ информации средствами *Excel*.

Шаг 1. Объектом анализа является клиент (покупатель).

Шаг 2. Параметр, по которому будет проводиться анализ – объемы продаж, в млн руб., за I квартал.

Шаг 3. Сортируем строки таблицы в порядке убывания значений объемов продаж покупателям за I квартал.

Результат реализации первых трех шагов алгоритма представлен на рабочем листе *Excel*.

Исходная информация

№ покупателя	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март
1	4 560	4 370	4 390
2	2 300	4 578	5 600
3	400	320	540
4	100	234	523
5	12	45	34
6	456	346	467
7	3 789	2 700	3 600
8	2 100	457	578
9	3 400	4 100	4 572
10	134	543	643
11	267	320	987
12	200	236	875
13	463	562	540
14	1 367	987	1 124
15	598	659	765

Второй шаг алгоритма

№ покупателя	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март	Объем продаж за квартал
1	4 560	4 370	4 390	13 320
2	2 300	4 578	5 600	12 478
3	400	320	540	1260
4	100	234	523	857
5	12	45	34	91
6	456	346	467	1269
7	3 789	2 700	3 600	10 089
8	2 100	457	578	3 135
9	3 400	4 100	4 572	12 072
10	134	543	643	1320
11	267	320	987	1574
12	200	236	875	1311
13	463	562	540	1565
14	1 367	987	1 124	3 478
15	598	659	765	2022

Третий шаг алгоритма

№ покупателя	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март	Объем продаж за квартал
1	4 560	4 370	4 390	13 320
2	2 300	4 578	5 600	12 478
9	3 400	4 100	4 572	12 072
7	3 789	2 700	3 600	10 089
14	1 367	987	1 124	3 478
8	2 100	457	578	3 135
15	598	659	765	2022
11	267	320	987	1574
13	463	562	540	1565
10	134	543	643	1320
12	200	236	875	1311
6	456	346	467	1269
3	400	320	540	1260
4	100	234	523	857
5	12	45	34	91

Рисунок 33. Реализация первых трех шагов алгоритма

Шаг 4. Рассчитаем величины: а) доли объемов продаж за I квартал для каждого покупателя от общей суммы продаж торговой фирмы; б) доли пункта а) с накопительным итогом.

Шаг 5. Определим группы А, В и С по долям объемов продаж за I квартал для каждого покупателя торговой фирмы с накопительным итогом. Группа А – более 50 %, группа В – около 80 %, остальные покупатели входят в группу С.

Реализация четвертого и пятого шагов алгоритма представлена на следующем рабочем листе *Excel*.

Четвертый шаг алгоритма				Пятый шаг алгоритма				
№ покупателя	Объем продаж за квартал	Доля объема продаж, %	Доля объема продаж с нарастающем итогом, %	№ покупателя	Объем продаж за квартал	Доля объема продаж, %	Доля объема продаж с нарастающим итогом, %	Группы A, B, C
1	13 320	20,23	20,23	1	13 320	20,23	20,23	A
2	12 478	18,95	39,18	2	12 478	18,95	39,18	A
9	12 072	18,34	57,52	9	12 072	18,34	57,52	A
7	10 089	15,32	72,84	7	10 089	15,32	72,84	A
14	3 478	5,28	78,12	14	3 478	5,28	78,12	B
8	3 135	4,76	82,88	8	3 135	4,76	82,88	B
15	2022	3,07	85,96	15	2022	3,07	85,96	B
11	1574	2,39	88,35	11	1574	2,39	88,35	C
13	1565	2,38	90,72	13	1565	2,38	90,72	C
10	1320	2,00	92,73	10	1320	2,00	92,73	C
12	1311	1,99	94,72	12	1311	1,99	94,72	C
6	1269	1,93	96,65	6	1269	1,93	96,65	C
3	1260	1,91	98,56	3	1260	1,91	98,56	C
4	857	1,30	99,86	4	857	1,30	99,86	C
5	91	0,14	100,00	5	91	0,14	100,00	C

Рисунок 34. Реализация последних двух шагов алгоритма

Для реализации пятого шага алгоритма, выделения групп A, B, C В.С. Лукинский разработал метод «касательных», приведем его описание и реализацию в среде *Excel*.

С помощью *Мастера диаграмм* строим график кривой долей объема продаж с нарастающим итогом (кривую ABC-анализа). На горизонтальной оси построения указаны номера покупателей, на вертикальной оси величины долей объемов продаж в процентах (см. рис. 35).

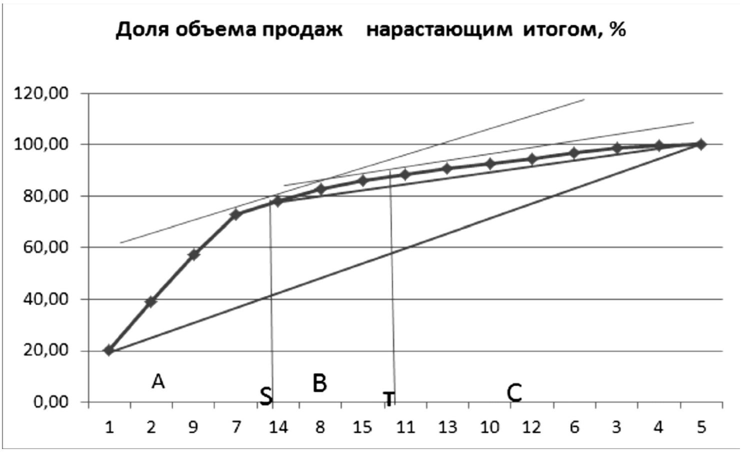


Рисунок 35. Кривая ABC-анализа

Соединяем начало и конец кривой отрезком прямой, проводим первую касательную к кривой ABC-анализа, параллельную отрезку. Из точки касания на горизонтальную ось опускаем перпендикуляр, основание которого обозначим точкой S. Точки горизонтальной оси промежутка [O, S] указывают номера покупателей группы A.

Далее соединяем точку касания и конец графика кривой ABC-анализа отрезком прямой, проводим вторую касательную к кривой параллельно отрезку. Второй перпендикуляр, опущенный из точки касания на горизонтальную ось в точку T, выделяет на оси промежуток [S, T], которому принадлежат номера покупателей группы B. Точки горизонтальной оси, находящиеся правее промежутка [S, T], – номера покупателей из группы C.

Представим статистику количества покупателей, вошедших в группы A, B, C, в виде следующей таблицы:

Группы A, B,C	Количество объектов	Доля, %
A	4	26,67
B	3	20,00
C	8	53,33
Общий итог	15	100,00

10.2. Метод XYZ-анализа

Наибольший эффект применение ABC-анализа дает в комбинации с другим, менее известным методом XYZ-анализа.

Метод XYZ-анализа позволяет произвести разделение тех же объектов (например, клиентов, поставщиков, материалов, готовой продукции) в зависимости от характера их использования (потребления) и точности прогнозирования изменений их поведения.

К группе **X** относятся объекты, которые характеризуются стабильной величиной использования (потребления), незначительными колебаниями в их расходе и высокой точностью прогноза.

Группу **Y** – составляют объекты, потребность в которых характеризуется известными тенденциями (например, сезонными колебаниями) и средними возможностями их прогнозирования.

К **Z** относятся объекты, которые потребляются нерегулярно, точность их прогнозирования невысокая.

Исходной информацией метода являются результаты деятельности предприятия (фирмы), канала распределения и других за предыдущий период (год, квартал и т.д.).

Основная идея XYZ-анализа состоит в группировании объектов анализа по мере однородности анализируемых параметров (по коэффициенту вариации). Формула для расчета коэффициента вариации:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}}{a},$$

где x_i – значение параметра по оцениваемому объекту за i-й период, a – среднее значение параметра по оцениваемому объекту анализа, n – число периодов.

Эта формула представляет собой отношение стандартного отклонения вариационного ряда к его среднеарифметическому значению. Чем больше значение стандартного отклонения, тем дальше от среднеарифметического значения находятся анализируемые значения. Стандартное отклонение – это абсолютная мера рассеивания вариантов ряда.

Реализацию метода можно представить в виде следующих шагов.

Шаг 1. Определить объекты анализа: клиент, поставщик, товарная группа/подгруппа, номенклатурная единица, и т.п

Шаг 2. Определить параметр, по которому будет проводиться анализ объекта: средний товарный запас, руб.; объем продаж, руб.; доход, руб.; количество единиц продаж, шт.; количество заказов, шт., и т.п.

Шаг 3. Определить период и количество периодов, по которым будет проводиться анализ: неделя, декада, месяц, квартал/сезон, полугодие, год.

Шаг 4. Определить коэффициент вариации для каждого объекта анализа.

Шаг 5. Отсортировать объекты анализа по возрастанию значения коэффициента вариации.

Шаг 6. Определить группы X, Y, Z.

Группа X – объекты, коэффициент вариации которых не превышает 10%.

Группа Y – объекты, коэффициент вариации которых не меньше 10 и не более 25%.

Группа Z – объекты, коэффициент вариации которых превышает 25%.

Пример 36 (*XYZ-анализ в распределительной логистике*). Провести XYZ-анализ, для торговой фирмы. Исходная информация – пример 1.

Решение. В среде *Excel* реализуем представленный алгоритм.

Шаг 1. Объектом анализа является клиент (покупатель).

Шаг 2. Параметр, по которому будет проводиться анализ, – объемы продаж, в млн руб.

Шаг 3. Период: три месяца – январь, февраль, март.

Шаг 4. Определить коэффициент вариации для каждого покупателя.

Отметим, что для определения коэффициента вариации используются функции *Excel*: СРЗНАЧ() и СТАНДОТКЛ().

Шаг 5. Отсортировать покупателей по возрастанию значения коэффициента вариации.

Шаг 6. Определить группы X, Y, Z.

Результат выполнения алгоритма показан на следующем рисунке.

Исходная информация

№ покупателя	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март
1	4 560	4 370	4 390
2	2 300	4 578	5 600
3	400	320	540
4	100	234	523
5	12	45	34
6	456	346	467
7	3 789	2 700	3 600
8	2 100	457	578
9	3 400	4 100	4 572
10	134	543	643
11	267	320	987
12	200	236	875
13	463	562	540
14	1 367	987	1 124
15	598	659	765

Первый -- четвертый шаги алгоритма

№ покупателя	Объем продаж за январь	Объем продаж за февраль	Объем продаж за март	Средний объем продаж за месяц	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации
1	4 560	4 370	4 390	4 440,00	104,40	2,35
2	2 300	4 578	5 600	4 159,33	1 689,37	40,62
3	400	320	540	420,00	111,36	26,51
4	100	234	523	285,67	216,18	75,68
5	12	45	34	30,33	16,80	55,39
6	456	346	467	423,00	66,91	15,82
7	3 789	2 700	3 600	3 363,00	581,90	17,30
8	2 100	457	578	1 045,00	915,66	87,62
9	3 400	4 100	4 572	4 024,00	589,68	14,65
10	134	543	643	440,00	269,68	61,29
11	267	320	987	524,67	401,27	76,48
12	200	236	875	437,00	379,75	86,90
13	463	562	540	521,67	51,98	9,96
14	1 367	987	1 124	1 159,33	192,45	16,60
15	598	659	765	674,00	84,50	12,54

Пятый, шестой шаг алгоритма

№ покупателя	Коэффициент вариации	Группы X, Y, Z
1	2,35	X
13	9,96	X
15	12,54	Y
9	14,65	Y
6	15,82	Y
14	16,60	Y
7	17,30	Y
3	26,51	Z
2	40,62	Z
5	55,39	Z
10	61,29	Z
4	75,68	Z
11	76,48	Z
12	86,90	Z
8	87,62	Z

Рисунок 36. Реализация алгоритма XYZ-анализа

Статистику количества покупателей вошедших в группы X, Y, Z представим в виде следующей таблицы

Группы X, Y, Z	Количество объектов	Доля, %
X	2	13,33
Y	5	33,33
Z	8	53,33
Общий итог	15	100,00

Наложением результатов ABC и XYZ-анализа получаем 9 групп покупателей (рис. 37).

Результаты ABC и XYZ		
№ покупателя	Группы A, B, C	Группы X, Y, Z
1	A	X
2	A	Z
3	C	Z
4	C	Z
5	C	Z
6	C	Y
7	A	Y
8	B	Z
9	A	Y
10	C	Z
11	C	Z
12	C	Z
13	C	X
14	B	Y
15	B	Y

	X	Y	Z
A	1	7, 9	2
B		14, 15	8
C	13	6	3, 4, 5, 10, 11, 12

Рисунок 37. Наложение результатов ABC и XYZ-анализа

Покупатели 1, 7, 9 групп *AX, AY, BX* требуют наибольшего внимания с логистической точки зрения, для них необходимо тщательное планирование потребности ресурсов, нормирование расхода, скрупулезный (ежедневный) учет и контроль, постоянный анализ отклонений от запланированных показателей, использовать систему снабжения по запросам с обязательным расчетом величины страхового запаса.

Для покупателей 6, 3, 4, 5, 8,10, 11, 12 групп *BZ, CY, CZ* применяются укрупненные методы планирования, поставки по предоплате.

11. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

11.1. Материальные запасы

Материальные запасы – это находящиеся на разных стадиях производства и обращения продукция производственно-технического назначения, изделия народного потребления и другие товары, ожидающие вступления в процесс производственного или личного потребления.

Основные виды затрат, связанных с созданием и содержанием запасов:

1) замороженные финансовые средства;
2) расходы на содержание специально оборудованных помещений;
3) оплата труда специального персонала;
4) постоянный риск порчи, хищения.

Отсутствие запасов – это тоже расходы, только выраженные в форме разнообразных потерь. К основным видам потерь относят:

1) потери от простоя производства;
2) от отсутствия товара на складе в момент предъявления спроса;
3) от закупки мелких партий товаров по более высоким ценам и др.

Содержание запасов сопряжено с определенными затратами, однако предприниматели вынуждены создавать запасы, поскольку их отсутствие может привести к еще большей потери прибыли.

Основные мотивы, которыми руководствуются предприниматели, создавая материальные запасы:

1) вероятность нарушения графика поставок;
2) возможность колебания спроса;
3) сезонные колебания производства некоторых видов товаров;
4) скидки за покупку крупной партии товаров;
5) издержки, связанные с оформлением заказа;
6) возможность срочного обслуживания производства и покупателей;
7) упрощение процесса управления производством и др.

На пути превращения сырья в конечное изделие и последующего движения этого изделия до конечного потребителя создаются следующие виды запасов.

Производственные запасы находятся на предприятии сферы материального производства, предназначены для производственного потребления. Цель создания таких запасов – обеспечить бесперебойное производство.

Товарные запасы – запасы готовой продукции у изготовителей, на пути следования товара от поставщика к потребителю, т.е. на предприятиях оптовой, мелкооптовой и розничной торговли, в заготовительных организациях и в пути.

Производственные и товарные запасы делят на **текущие, страховые и сезонные**.

Текущие запасы – основная часть производственных и товарных запасов. Они обеспечивают непрерывность производственного или торгового процесса между очередными поставками.

Страховые запасы предназначены для непрерывного обеспечения материалами или товарами производственного или торгового процесса в случае различных непредвиденных обстоятельств.

Запасы сезонные образуются при сезонном характере производства, потребления или транспортировки.

При выборе размера запасов на предприятии опираются на стадию процесса производства и место предприятия в товаропроводящей цепи. Размеры запасов должны, с одной стороны, обеспечить непрерывность процесса воспроизводства, с другой – из кругооборота не должно отвлекаться слишком большое число материальных ресурсов. При построении моделей управления запасами учитываются в первую очередь затраты на их транспортировку и хранение.

Нормой запаса называется расчетное минимальное количество товаров (продукции), которое должно находиться у производственных или торговых предприятий для обеспечения бесперебойного снабжения производства продукции или реализации товаров.

При определении норм товарных запасов используют три группы методов: эвристические, методы технико-экономических расчетов и экономико-математические методы и модели.

Эвристические методы предполагают использование опыта специалистов, которые изучают отчетность за предыдущий период, анализируют рынок и принимают решения о минимально необходимых запасах, основанные в значительной степени на субъективном понимании тенденций развития спроса.

Метод технико-экономических расчетов заключается в разделении совокупного запаса в зависимости от целевого назначения на отдельные группы, например номенклатурные позиции (или ассортиментные позиции – в торговле). Для выделенных групп отдельно рассчитывается страховой, текущий и сезонный запасы, каждый из которых в свою очередь может быть разделен на некоторые элементы.

Управление запасами заключается в решении двух основных задач:

1) определение размера необходимого запаса, т. е. нормы запаса;
2) создание системы контроля за фактическим размером запаса и своевременным его пополнением в соответствии с установленной нормой.

Контроль за состоянием запасов – это изучение и регулирование уровня запасов продукции производственно-технического назначения и товаров народного потребления с целью выявления отклонений от норм запасов и принятия оперативных мер к ликвидации отклонений.

Необходимость контроля обусловлена повышением издержек в случае выхода фактического размера запаса за рамки нормы запаса. Контроль за состоянием запаса может проводиться на основе данных учета запасов, переписей материальных ресурсов, инвентаризаций или по мере необходимости.

Модели управления запасами позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита.

11.2. Модель управление запасами без дефицита (модель Уилсона)

Данная модель является простейшей моделью, описывает ситуацию закупки продукции у внешнего поставщика, которая характеризуется следующими допущениями:

1) интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной;
2) заказ доставляется со склада, на котором хранится ранее произведенный товар;
3) время поставки заказа является известной и постоянной величиной;
4) каждый заказ поставляется в виде одной партии;
5) затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа;
6) затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру;
7) отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Входные параметры модели Уилсона:

1) v – интенсивность (скорость) потребления запаса, [ед. тов. / ед. времени];
2) s – затраты на хранение запаса, [у.е./ед.тов. · ед. времени];
3) K – затраты на осуществление заказа, включающие оформление и доставку заказа, [у.е.];
4) $t_Д$ – время доставки заказа, [ед. времени].

Выходные параметры модели Уилсона

1) Q – размер заказа, [ед. тов.];
2) L – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [у.е./ед. времени];
3) τ – период поставки, т.е. время между подачами заказа или между поставками, [ед. времени];
4) h_0 – точка заказа, т.е. размер запаса на складе, при котором надо подавать заказ на доставку очередной партии, [ед. тов.].

Наличие запаса на складе, согласно модели Уилсона, можно представить графически (рис. 38).

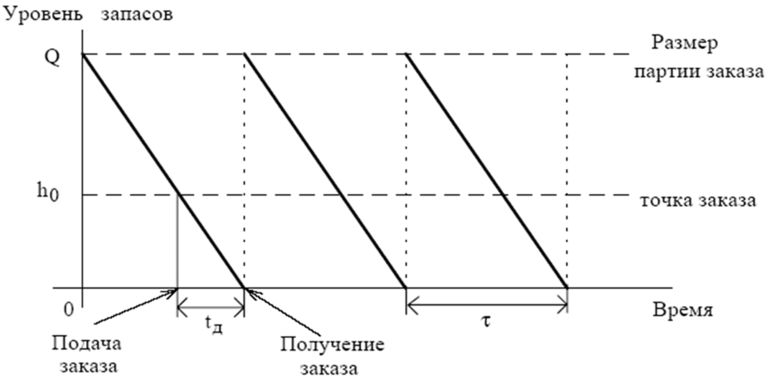


Рисунок 38. График наличия складских запасов

Издержки L_τ в течение цикла состоят из стоимости заказа K и затрат на содержание запаса, которые пропорциональны средней величине запаса $Q/2$ и длине цикла τ:

$$L_\tau = K + s \cdot \frac{Q}{2} \cdot \tau \ .$$

Поскольку $\tau = Q / v$, то удельные издержки в единицу времени

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} \ .$$

Приравнивая к нулю производную этой функции по Q, получим

$$L' = -\frac{K\nu}{Q^2} + \frac{s}{2}.$$

Откуда величина поставки при минимуме удельных издержек

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}.$$

Чтобы удостовериться в этом, найдем вторую производную функции удельных издержек

$$L'' = 2 \cdot \frac{K\nu}{Q^3} > 0$$

при положительном значении Q.

Другие формулы модели Уилсона

1) оптимальный период поставки заказа $\tau^* = Q^*/\nu$;
2) точка заказа $h_0 = t_д \cdot \nu$.

Основная сложность при решении задач по управлению запасами состоит в правильном определении входных параметров задачи, поскольку не всегда в условии их числовые величины задаются в явном виде.

При использовании формул модели необходимо внимательно следить за тем, чтобы все используемые в формуле числовые величины были согласованы по единицам измерения. Так, например, оба параметра s и ν должны быть приведены к одним и тем же временных единицам (к дням, к сменам или к годам), параметры K и s должны измеряться в одних и тех же денежных единицах и т.д.

Проиллюстрируем применение модели управления запасами Уилсона на примере.

Пример 37 (*управление запасами по модели Уилсона*). Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 у.е. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при шестидневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 0, 4 у.е. за одну упаковку. Необходимо определить: сколько упаковок пакетов должен заказывать владелец магазина для одной поставки; частоту заказов; точку заказа. Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение. Примем за единицу времени год, тогда ν = 500 шт. пакетов в год, K =10 у.е., s = 0,4 у.е. /шт. год. Поскольку пакеты супа заказываются со склада поставщика, а не производятся самостоятельно, то будем использовать модель Уилсона.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \text{ (шт.)}$$

Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 штук. При расчете других параметров задачи будем использовать не Q^*=158,11, а Q^* =158. Годовые затраты на управление запасами равны

$$L = K\cdot\frac{\nu}{Q^*} + s\cdot\frac{Q^*}{2} = 10\cdot\frac{500}{158} + 0{,}4\cdot\frac{158}{2} = 63{,}24 \text{ (у.е.)}$$

Подачу каждого нового заказа должна производиться через

$$\tau^* = Q^*/\nu = \frac{158}{500} = 0{,}312 \text{ (года)}.$$

Поскольку известно, что год равен 300 рабочим дням, то

$$\tau^* = 0{,}312\cdot 300 = 93{,}6 \text{ (раб. дней)}.$$

Заказ следует подавать при уровне запаса, равном

$$h_0 = t_д\cdot\nu = 12\cdot\frac{500}{300} = 20 \text{ (пакетов)}$$

т.е. эти 20 пакетов будут проданы за 12 дней, пока будет доставляться заказ.

Расчеты по модели Уилсона удобно проводить в *Excel*, создав специальную форму (рис. 39).

B12 =ОКРУГЛ(B6*B3/B7;0)

	A	B	C
1	Входные параметры модели		
2	**Параметры**	**Значения**	**Единицы измерения**
3	Интенсивность потребления	500	шт/год
4	Затраты на оформление и доставку заказа	10	у.е.
5	Затраты на хранение запаса	0,4	у.е./шт.год
6	Время доставки	12	дн.
7	Количество раб.дн. В году	300	дн.
8	**Выходные параметры модели**		
9	Размер заказа	158	шт.
10	Затраты на управление запасами	63	у.е./год
11	Период поставки	95	дн.
12	Точка заказа	20	шт.

Рисунок 39. Расчет параметров модели Уилсона

В клетках рабочего листа *Excel* B9:B12 заложены расчетные формулы модели Уилсона.

11.3. Модель управления запасами, учитывающая скидки

Если на заказы большого объема предоставляются скидки, несмотря на то что заказы на более крупные партии повлекут за собой увеличение затрат на хранение, это увеличение может быть компенсировано снижением закупочной цены. Оптимальный размер заказа может изменяться при отсутствии скидок, поэтому затраты на приобретение товара необходимо учитывать в модели покупок со скидками.

Уравнение общих затрат для ситуации, когда учитываются затраты на покупку товара, имеет вид:

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} + c \cdot \nu.$$

Это уравнение относительно уравнения без учета скидок представлено на графике (рис. 40).

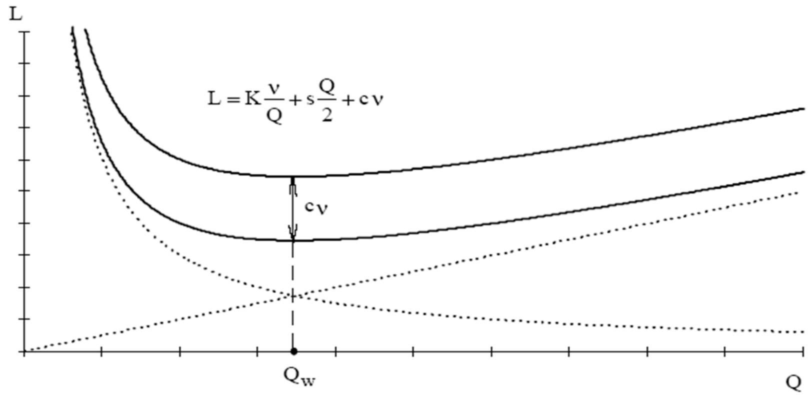


Рисунок 40. Графическое представление затрат

где *c* – цена товара [у.е./ед. тов.]; *cv* – затраты на покупку товара в единицу времени [у.е./ед.t]. Если цена закупки складируемого товара постоянна и не зависит от *Q*, то ее включение в уравнение общих затрат приводит к перемещению графика этого уравнения параллельно оси Q и не изменяет его формы. Иначе говоря, в случае постоянной цены товара ее учет не меняет оптимального решения Q_w. Здесь пунктиром показаны графики затрат пополнения и хранения запаса.

Влияние единственной скидки на общие затраты управления запасами показано на рисунке 41. Чтобы определить оптимальный размер заказа Q^*, необходимо проанализировать, в какую из трех областей попадает точка разрыва цены Q_{p1}.

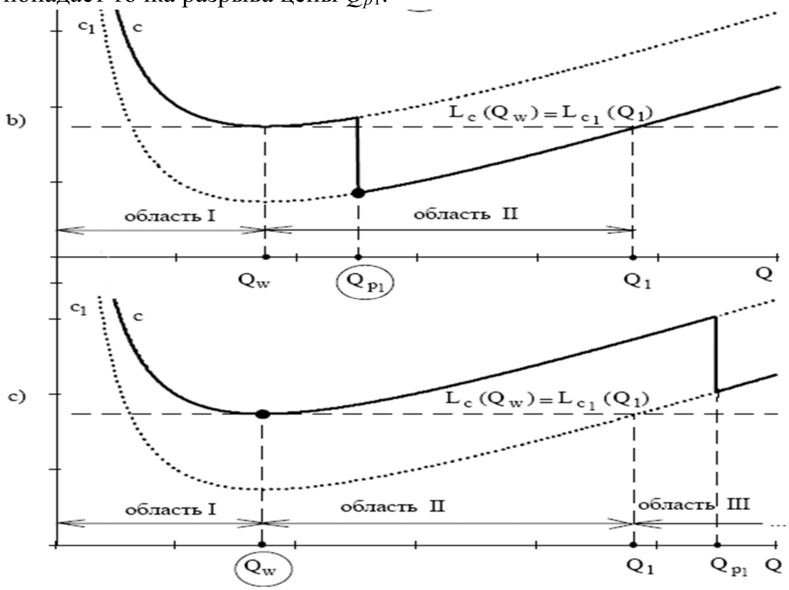


Рисунок 41. Влияние единственной скидки на затраты

Исходя из графика, правило выбора Q* для случая с одной скидкой имеет вид:

$$Q^* = \begin{cases} Q_W, \text{ если } 0 \le Q_{p_1} < Q_W & \text{(область I)}, \\ Q_{p_1}, \text{ если } Q_W \le Q_{p_1} < Q_1 & \text{(область II)}, \\ Q_W, \text{ если } Q_{p_1} \ge Q_1 & \text{(область III)}. \end{cases}$$

Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 38 (*управление запасами с учетом скидки на цену товара*). Затраты на заказ равны $K = 10$ у.е., затраты на хранение продукции $s = 1$ у.е. /шт. в сутки, интенсивность потребления товара $\nu = 5$ шт. в сутки, цена товара – $c = 2$ у.е. за штуку, а при объеме закупки 15 шт. и более – $c_1 = 1$ у.е. Определите оптимальный размер заказа, цену покупки и затраты на управление запасами.

Решение. Вычисляем объем заказа по формуле Уилсона

$$Q_w = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10 \text{ шт.}$$

Очевидно, что в область I Q_{p1} = 15 шт. не попадает, так как $Q_{p1} > Q_w$. Таким образом, Q_{p1} может попасть в области II или III. Границей между этими областями служит размер заказа Q_1, уравнивающий общие затраты при цене со скидкой c_1=1 у.е./шт. и затраты при заказе Q_w по исходной цене c = 2 у.е./шт., т.е.

$$L_c(Q_w) = L_{c_1}(Q_1).$$

$$10 \cdot 5/10 + 1 \cdot 10/2 + 2 \cdot 5 = 20 = 10 \cdot 5/Q_1 + 1 \cdot Q_1/2 + 1 \cdot 5.$$

Отсюда имеем

$$Q_1^2 - 30 \cdot Q_1 + 100 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$Q_1 = 26{,}18 \text{ шт. или } Q_1 = 3{,}82 \text{ шт.}$$

Согласно вышеизложенным правилу и графику оптимальным является объем заказа Q^* = 15 шт. по цене 1 у.е./шт., в данной ситуации скидкой пользоваться выгодно. Общие затраты при этом составляют

$$10 \cdot 5/15 + 1 \cdot 15/2 + 1 \cdot 5 = 15{,}8 \text{ у.е.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Просветов, Г. И. Математические методы в логистике. Задачи и решения / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2009.
2. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Вышэйшая школа, 2008.
3. Модели и методы теории логистики / В. С. Лукинский [и др.]. – М., СПб. : Питер, 2007.
4. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: Компьютерное моделирование : учеб. пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников. – М. : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2010.
5. Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев. – М.: ЮНИТИ, 1999.
6. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960.
7. Excel 2007 для менеджеров и экономистов: логические, производственные и оптимизационные расчеты. – СПб. : Питер, 2009.
8. Куперштейн, В. И. Microsoft Project 2013 в управлении проектами / В. И. Куперштейн. – СПб. : БХВ-Петербург, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Составитель **Крачковский** Александр Петрович

Учебно-методическое пособие
для специальности 1-26 02 05 «Логистика»

Компьютерная верстка *В. И. Дробудько*
Корректор *Е. В. Аземша*
Дизайн обложки *К. И. Липский*

Подписано в печать 12.10.2015.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ

Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО».
Ул. Казинца, 21-3, 220099, Минск.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий 1/423 от 02.09.2014.

Отпечатано в ПДУП «Типография Федерации профсоюзов Беларуси».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
2/18 от 26.11.2013.

Пл. Свободы, 23/90, г. Минск.
ЛП 02330/54 от 12.08.2013.