

## СЕКЦИЯ 7. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

### О ПРЕДЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ЭКОНОМИКЕ

**В. А. Арико, Д. А. Казаченко,**

студенты факультета международных экономических отношений и менеджмента

*Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси*

*«Международный университет «МИТСО», г. Минск*

Научный руководитель:

**В. А. Шилинец,**

кандидат физико-математических наук, доцент

заведующий кафедрой высшей математики

*Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси*

*«Международный университет «МИТСО», г. Минск*

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов получило название предельного анализа.

В экономике широко используются средние величины: средняя стоимость продукции, средняя производительность труда и т. д. Средние величины важны и при коммерческой деятельности: средний доход, средний объем продаж и т. д.

Но при планировании развития производства, да и любой предпринимательской деятельности возникает, например, такая задача: требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты, и, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся.

Оперируя средними величинами, не получишь ответа на такой вопрос. Здесь речь идет о приростах переменных величин. В подобных задачах нужно найти предел отношения приращений рассматриваемых величин, или, как говорят, предельный эффект.

Рассмотрим в качестве примера соотношения между средним и предельным доходом в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Суммарный доход (выручка) от реализации количества товара  $Q$  можно определить как произведение цены единицы продукции на количество продукции  $Q$ , т. е.  $R = PQ$ .

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а, следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает.

Будем полагать, что это происходит по прямой, т. е. кривая спроса  $P(Q)$  – линейная убывающая функция  $P = aQ + b$ , где угловой коэффициент  $a$  отрицателен, а параметр  $b$  положителен.

Подставляя выражение для цены  $P$  в формулу для суммарного дохода, получим квадратичную функцию:

$$R = PQ = (aQ + b)Q = aQ^2 + bQ$$

Предельный доход определяется как производная от суммарного дохода  $R$  по количеству товара  $Q$ :

$$R'_Q = \frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}(aQ^2 + bQ) = 2aQ + b$$

Экономический смысл предельного дохода очень прост: он приблизительно равен изменению суммарного дохода при изменении количества реализованного товара на единицу.

Еще раз подчеркнем, что прилагательное «предельный» в экономике характеризует не сами величины, а эффект их изменения.

Кроме понятия предельного дохода, используется также понятие среднего дохода, который определяется как доход на единицу продукции:

$$R_{\text{cp}} = \frac{R}{Q} = \frac{PQ}{Q} = P$$

Это общее выражение показывает, что средний доход совпадает с ценой. В случае «монопольной» модели имеем:

$$R_{\text{cp}} = P = aQ + b$$

Таким образом, в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.

В противоположность монополии рассмотрим другой крайний случай – совершенного, конкурентного рынка.

Эта модель предполагает, что имеется огромное число независимых фирм, продающих однородную продукцию, и нет никаких препятствий для «вхождения в рынок». Кроме того, каждая фирма производит (продает) лишь небольшую долю от общего объема продукции и не способна контролировать цены (сговор исключен). При этих условиях возможна устойчивая продажа только по преобладающей рыночной цене.

Если обозначить эту постоянную цену, не зависящую от действий отдельной фирмы, через  $b$ , то кривая спроса будет иметь вид  $P = b$ .

Соответственно, суммарный доход:

$$R = PQ = bQ,$$

предельный доход:

$$R'_Q = \frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}(bQ) = b,$$

средний доход:

$$R_{\text{cp}} = P = b$$

Отсюда следует, что в условиях свободного конкурентного рынка предельный и средний доходы совпадают.

Нами рассмотрен доход и соответствующий ему предельный доход. Такой же подход может быть применен и к другим экономическим понятиям.

Пусть, например, известна функциональная зависимость издержек (затрат)  $C$  от объема продукции  $Q$ :

$$C = f(Q)$$

Предельные издержки можно определить как

$$C'_Q = \frac{dC}{dQ} = \frac{d}{dQ} f(Q)$$

Экономический смысл этой формулы таков: предельные издержки приблизительно равны изменению полных издержек при изменении выпуска на единицу.

Рассмотрим теперь экономико-математическое уравнение (производственную функцию), связывающее переменные величины затрат (ресурсов) с величинами продукции (выпуска). Ограничимся сейчас случаем, когда количество продукции  $Q$  зависит только от приложенного труда  $L$  (для фирмы это просто численность персонала). Такое допущение в краткосрочном плане приемлемо, производственная функция может быть записана как

$$Q = f(L)$$

Для оценки эффективности производства часто используется (средняя) производительность труда  $P_L$ , которую естественно определить в виде отношения:

$$P_L = \frac{Q}{L}$$

Руководителей фирмы часто интересует вопрос, как изменится объем продукции  $Q$  при увеличении (уменьшении) численности персонала  $L$ . Ответ можно получить, если ввести понятие предельной производительности труда как производную от продукции  $Q$  по величине приложенного труда  $L$ :

$$Q'_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{d}{dL} f(L)$$

Экономический смысл этого понятия таков: предельная производительность труда приблизительно равна изменению объема выпускаемой продукции при изменении численности персонала на единицу.

#### **Список использованных источников**

1. Колесников, А. Н. Краткий курс математики для экономистов : учеб. пособие / А. Н. Колесников. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 208 с.