О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

К. А. Фесько,
студент факультета международных экономических отношений и менеджмента
Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО», г. Минск
Научный руководитель:
В. А. Шилинец,
кандидат физико-математических наук, доцент
заведующий кафедрой высшей математики
Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО», г. Минск

Рассмотрим проблему оптимизации, т. е. задачу нахождения максимумов и минимумов экономических функций.

Начнем с двух достаточно простых примеров (для большей наглядности параметрам приданы конкретные числовые значения).

Пусть в краткосрочном плане производственная функция зависит только от численности персонала и имеет вид:

$$Q = f(L) = 6L^2 - 0,2L^3,$$

где Q – выпуск продукции, а L – число работающих. Требуется определить численность персонала, при котором Q достигает максимального значения.

Прежде всего находим стационарные точки. Для этого вычисляем производную и приравниваем ее к нулю:

$$f'(L) = \frac{dQ}{dL} = (6L^2 - 0,2L^3)' = 12L - 0,6L^2 = 0$$

Из полученного квадратного уравнения находим $L = 0$, $L = 20$.

Вычисляем вторую производную:

$$f''(L) = \frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1,2L$$

При $L = 0$ имеем $f''(0) = 12 > 0$. Отсюда заключаем, что в этой точке имеется минимум. Это естественно: трудно ожидать выпуска какой-то продукции, если нет ни одного работающего.

Для второй точки $f''(20) = -12 < 0$. В этой точке максимум. Соответствующий выпуск продукции:

$$Q = f(20) = 6 \times (20)^2 - 0,2 \times (20)^3 = 800$$

Заметим, что не всегда задана функция, нахождение экстремума которой решает задачу оптимизации. Рассмотрим пример, поясняющий сказанное.

Предположим, что для некоторого товара кривые спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$P = -3Q_D + 80\,,\; P = Q_S + 8\,,$$

где Q_D – количество товара, относящегося к спросу, а Q_S — к предложению. Каждая единица товара облагается налогом t. Необходимо найти, какую величину налога следует установить, чтобы поступления в казну были максимальны.

Ясно, что слишком большой налог может «задавить» любую экономическую деятельность. Недостатки слишком маленького налога очевидны.

Для того чтобы учесть налоги, достаточно в уравнении, определяющем предложение, заменить цену P на $P-t$, поскольку именно эту сумму реально получает производитель. Получим уравнение $P - t = Q_S + 8$ или $P = Q_S + 8 + t$.

Так как в точке равновесия $Q_S = Q_D = Q$, т. е. спрос равен предложению, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P = Q + 8 + t, \\ P = -3Q + 80 \end{cases}$$

Приравняем правые части $Q + 8 + t = -3Q + 80$ и после упрощений получим:

$$Q = 18 - 0,25t$$

Поскольку t – это налог на единицу товара, то для суммарного поступления налога T от продажи товара Q имеем:

$$T = tQ = t(18 - 0,25t) = 18t - 0,25t^2$$

Получили функцию, точки максимума которой и дают решение поставленной задачи.

Найдем стационарные точки:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(18t - 0,25t^2) = 18 - 0,5t = 0\,,\; t = 36$$

В данном случае стационарная точка только одна. Проверим знак второй производной в этой точке:

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d}{dt}(18 - 0,5t) = -0,5 < 0$$

Таким образом, оптимальная величина налога составляет 36 на единицу товара.

Рассмотрим еще один пример на использование дифференциального исчисления функций одной переменной.

Пусть капитал в 1 млрд рублей может быть размещен в банке под 50 % годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 100 %, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в p %.

Необходимо определить: при каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

Пусть x (млрд рублей) инвестируется в производство, а $1-x$ размещается под проценты. Тогда размещенный капитал через год станет равным $(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x$, а капитал, вложенный в производство: $x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x$, Издержки составят αx^2 $(\alpha>1)$, т. е. прибыль от вложения в производство $C=2x-\alpha x^2$. Налоги составят $(2x-\alpha x^2)\frac{p}{100}$, т. е. чистая прибыль окажется равной $\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x-\alpha x^2)$.

Общая сумма через год составит:

$$A(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x-\alpha x^2)=\frac{3}{2}+\left(2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right)x-\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2,$$

и требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке $[0;1]$.

Находим, что $A'(x)=0$ при $x_0=\dfrac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)}\times$ $A''(x)=-2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)<0$, т. е. согласно второму достаточному условию экстремума x_0 – точка максимума.

Чтобы точка x_0 принадлежала отрезку $[0;1]$, необходимо выполнение условия:

$$0<2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}<2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right),\ \text{откуда}\ p<25$$

Таким образом, если $p>25$, то выгоднее ничего не вкладывать в производство и разместить весь капитал в банке. Если же $p<25$, то можно показать, что при $x=x_0$ $A(x_0)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\left(2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right)^2}{4\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)}>\dfrac{3}{2}=A(0)$, т. е. вложение в производство является более выгодным, чем чистое размещение под проценты.

Список использованных источников

1. Колесников, А. Н. Краткий курс математики для экономистов : учеб. пособие / А. Н. Колесников. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 208 с.
2. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 471 с.