ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕДИЦИНЕ

С. С. Курусь, К. А. Станчук,
студенты факультета международных экономических отношений и менеджмента
Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО», г. Минск
Научные руководители:
В. В. Подгорная,
старший преподаватель кафедры высшей математики
Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО», г. Минск
П. И. Кибалко,
кандидат педагогических наук, доцент
профессор кафедры высшей математики
Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО», г. Минск

Процессы, которые происходят в современном мире, требуют качественных и глубоких познаний у специалистов. В наши дни, благодаря глобализации, с каждым годом улучшается техника, появляются новые знания и исследования в сфере медицины. Для создания техники люди нуждаются в расчетах, где не обходится без дифференциальных уравнений. В современном мире изменяется деятельность медицинского персонала, связанная с использованием математического моделирования, статистики и иных явлений, которые находят применение на практике [1].

Экономическое образование подразумевает умение специалистов применять свои знания в различных областях. Рассмотрим формирование профессиональных компетенций экономиста через применение математических знаний в медицине.

Роль математики в медицине – содействие в осуществлении диагностических процедур. В настоящее время методы лечения и диагностики заболеваний существенно расширились. Значительная часть медицинских центров применяют методы математического моделирования, что увеличивает точность подавляющего большинства установленных диагнозов. Знания основ математики применяются врачами для характеристики процессов, происходящих в организме человека. Во многих учебных заведениях одновременно с основными медицинскими дисциплинами студенты изучают и математику. Основной проблемой прикладной математики является выбор первоначальной математической модели, и ни в одной области знания это не чувствуется, как в биологии и медицине [2].

Тема «Дифференциальные уравнения» является одной из самых больших разделов в современной математике. Она имеет пересечения со многими сферами деятельности. Для начала дифференциальное уравнение – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала. Они являются фундаментом для построения научных трудов и функционально используются в производстве, что немаловажно для современной экономики и других отраслей производства. Также дифференциальные уравнения широко используются на практике. Так, например, результат химических реакций, вычисление мажоритарной выручки фирмы, динамика силы тока с течением времени, демографическая обстановка в определенном регионе вычисляются с помощью дифференциальных уравнений [1].

Тема данной работы всегда остается актуальной, так как математические методы применяются в решении многих вопросов, в том числе и в области медицины.

С каждым годом ученые выявляют все новые болезни, находят лекарства, новые способы лечения. И все это не было бы возможно без математики.

Рассмотрим применение дифференциальных уравнений для решения конкретной задачи, применяемой в медицине.

1. Растворение лекарственных форм вещества из таблеток.

Испытание «Растворение» предназначено для определения количества действующего вещества, которое в условиях, указанных в фармакопейной статье или нормативной документации, за определенный промежуток времени должно высвобождаться в среду растворения из твердой дозированной лекарственной формы.

Пусть n – количество вещества в таблетке, которое осталось до времени растворения t. Тогда

$$\frac{dn}{dt} = -kn,$$

где k – постоянная скорость растворения. В данном уравнении минус означает то, то с течением времени количество лекарственных форм вещества убывает.

Рассмотрим решение.

В дифференциальном уравнении разделим переменные и затем его проинтегрируем:

$$\frac{dn}{n} = -kdt,$$

$$\int \frac{dn}{n} = -\int kdt$$

Следовательно, получим:

$$\ln|n| = -kt + \ln|C|$$

Воспользуемся свойством логарифма, получим:

$$|n| = C_1 e^{-kt},$$

где $C_1 = e^c$ – произвольная константа.

По свойству модуля получим:

$$n = C_2 e^{-kt},$$

где $C_2 = \pm C_1$ – произвольная константа.

Полагая, что при $t = 0$ $n = n_0$, получаем $C_2 = n_0$, значит:

$$n = n_0 e^{-kt}$$

Формула выражает закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток в интегральной форме. Из уравнения:

$$n = n_0 e^{-kt}$$

найдем постоянную скорость распространения k:

$$К = \frac{1}{t\ln\left(\frac{n_0}{n}\right)}$$

Период полурастворения таблеток $t = t_{\frac{1}{2}}$, $n = \frac{n_0}{2}$:

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-kt_{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt_{\frac{1}{2}}}$$

Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln\frac{1}{2} = -kt_{\frac{1}{2}}$$

Выразим $t_{\frac{1}{2}}$, получим $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}693}{k}$ [3].

2. Теперь рассмотрим пример распада лекарства в организме человека.

Условие задачи:

В организм больного ввели лекарство, какая часть лекарства распадется через 8 часов, если через 4 часа после введения 4 мг препарата его масса уменьшилась в два раза?

Решение:

Для решения данной задачи надо установить зависимость изменения количества лекарственного вещества в организме от времени. Обозначим: $N_0 = 8$ – количество лекарственного препарата (в мг) в начальный момент времени, $N_2 = 4$ – количество лекарственного препарата через два часа, где N – количество препарата в любой момент времени. Скорость изменения количества препарата пропорциональна количеству препарата в данный момент времени:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Решением данного дифференциального уравнения, которое описывает искомую зависимость, является следующее выражение:

$$N = Ce^{kt}$$

Используя начальные условия, определим С:

$$8 = Ce^{k0},$$

так как $e^0 = 1$,

С = 8

Значит $N = 8e^{kt}$. Известно, что как только в организм ввели препарат, через 4 часа его масса уменьшилась в два раза. Определим k. Для этого подставим в последнее уравнение значения $t = 4$, $N = 4$, получим:

$$4 = 8e^{k4},$$
$$0{,}5 = e^{4k}$$

Прологарифмируем обе части уравнения и получим:

$$\ln 0{,}5 = \ln e^{4k},$$
$$\ln 0{,}5 = 4k \ln e$$

Так как $\ln e = 1$, следовательно

$$k = \frac{\ln 0{,}5}{4}$$

Зависимость количества препарата в организме от времени можно записать так:

$$N = 8e\frac{\ln 0{,}5}{4}t$$

Теперь мы можем узнать количество вещества через 8 часов (8 = 4), для этого нужно подставить в уравнение, и получим:

$$N = 8e\frac{ln0{,}5}{4} \times 8,$$
$$N = 8e^{\ln(0{,}5)\times 2}$$

Так как ln 0,5= – 0,693, то $\ln(0{,}5) \times 2 = -1{,}386$.

Следовательно:

$$N = 8e^{-1{,}386} = 8 \times 0{,}25 = 2$$

Через 8 часов в организме будет находиться 2 мг препарата. За это время распалось 8 – 2= 6 мг. В итоге у нас получилось, что за 8 часов распалось 6 мг вещества [4].

Модель «хищник – жертва» в настоящее время используется в медицине. При моделировании онкологических заболеваний опухолевые клетки рассматриваются как жертвы, а лимфоциты, которые могут их подавить, как хищники. Данные методы помогают медикам определить путь оптимального лечения и создать новые средства борьбы с ними.

3. Рассмотрение модели «хищник-жертва»

Пусть x – количество опухолевых клеток;

y – количество клеток лимфоцитов.

Так как со временем количество опухолевых клеток и лимфоцитов со временем меняется, то будем считать x и y непрерывными функциями от времени *t*.

Назовем *x* и *y* – состоянием модели.

Найдем, как изменяется состояние модели.

Рассмотрим:

$\frac{dx}{dy}$ – скорость изменения количества опухолевых клеток.

Если опухолевых клеток нет, то количество лимфоцитов уменьшается. Эта зависимость будет считаться линейной:

$$\frac{dy}{dt} - a_2 y$$

В экосистеме скорость изменения количества каждого вида также будем считать пропорциональным его количеству, но только с коэффициентом, который зависит от количества особей другого вида. Таким образом, для опухолевых клеток этот коэффициент уменьшается с увеличением количества лимфоцитов, а для лимфоцитов возрастает с увеличением количества опухолевых клеток. Эта зависимость также будет линейной. Следовательно, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = -a_2 y + b_2 xy \end{cases}$$

Полученная система уравнений называется моделью Лотки-Вольтерры.

a_1, a_2, b_1, b_2 – числовые коэффициенты (параметры модели).

Характер изменения состояния модели (x, y) определяется значениями параметров. Решая данную систему уравнений, можно исследовать закономерности изменения состояния здоровья [5].

При изучении какого-либо явления изначально создается его математическая модель, она описывает основные законы, которым это явление подчиняется в математической форме. На наших примерах эти законы выражались в виде дифференциальных уравнений. Математические модели облегчают прогнозирование результатов эксперимента, проводимых в реальных системах, дают возможность изучать явление в целом, предсказывая его развитие, изменения, происходящие с ним в течение времени.

В представленной работе мы рассмотрели применение дифференциальных уравнений для решения задач в медицине на примере модели растворения лекарственных форм вещества из таблеток, моделировании лечения онкологических заболеваний. Математический аппарат решения дифференциальных уравнений позволяет на практике решать множество задач естественнонаучного цикла.

Применение знаний специалиста экономической специальности в сфере здравоохранения и медицины предполагает осуществление экономической деятельности медицинской организации. В компетенцию экономиста входят такие обязанности, как подготовка исходных данных для составления проектов хозяйственно-финансовой деятельности медицинской организации, выполнение расчетов себестоимости медицинских услуг, расчетов необходимых материальных, трудовых и финансовых затрат, разработка мероприятий по эффективному использованию капитальных вложений, материальных, трудовых и финансовых ресурсов. Экономист также должен способствовать повышению производительности труда, снижению издержек на оказание медицинских услуг, устранению потерь, определять экономическую эффективность организации труда и производства, внедрения новых технологий и изобретений, участвовать в проведении маркетинговых исследований и прогнозировании развития медицинской организации и многое другое [5].

Также не обходится без специалистов логистического профиля. В последнее время значительное внимание уделяется контролю качества фармацевтических и медицинских препаратов, для которых обязательно соблюдение не только температурных условий, но и недавно введенные правила надлежащей практики хранения и перевозки, что предполагает безусловное обеспечение сохранности свойств продукции в процессе перемещения, с соответствующим подтверждением на каждом «плече».

Исходя из всего вышеперечисленного, мы видим, что профессия экономиста играет немаловажную роль в организации системы здравоохранения и обеспечения ее бесперебойного функционирования.

Список использованных источников

1. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М., 1984. – 295 с.
2. Гилярова, М. Г. Математика для медицинских колледжей / М. Г. Гилярова. – Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 416 с.
3. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток [Электронный ресурс] // Poznayka.org. – Режим доступа: https://poznayka.org/s8157t1.html. – Дата доступа: 19.03.2019.
4. Рубецков, Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней / Д. И. Рубецков // Известия Вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – № 2. – С. 69–87.

5. Должностная инструкция экономиста медицинской организации [Электронный ресурс] // Prom-Nadzor.ru. – Режим доступа: http://prom-nadzor.ru/content/dolzhnostnaya-instrukciya-ekonomista-medicinskoy-organizacii. – Дата доступа: 21.03.2019.